7.–8. klašu olimpiādes: Skaitļu teorija

Ievads

Testu materiāls domāts skolotājiem un pulciņu vadītājiem, gatavojot pamatskolas skolēnus matemātikas olimpiādēm, it īpaši uzdevumiem skaitļu teorijā. Nepieciešamās prasmes (pirmskaitļi, dalāmības pazīmes, LKD, MKD u.c.) nav sarežģītas, tomēr skolās tām pieskaras salīdzinoši reti un bērni tās nereti piemirst. Sarežģītākas veselu skaitļu īpašības kā arī loģiskus spriedumus par atlikumiem, paritāti, Eiklīda algoritmus skolā var skart vien garāmejot. Vai olimpiāžu uzdevumiem (kur nosaka spēju pamatot matemātiskus apgalvojumus) var gatavoties, risinot testus (jeb vingrinājumus, kuros ir svarīga tikai atbilde), nav acīmredzams jautājums. Esam noteikuši to tehnisko prasmju kopums, ko var pārbaudīt testos. Skolēnus motivē testiem raksturīgā tūlītējā atgriezeniskā saite un arī iespēja mērīt savas zināšanas.
Tālākā materiāla attīstībā vēlamies izveidot "pašpietiekamu" testu kopumu skaitļu teorijā gan pamatskolu vecākajām klasēm, gan arī vidusskolām. Tas nozīmētu testus, kuru ir tik daudz, lai nebūtu jāslēpj pareizās atbildes un jautājumu analīze; lai testu jautājumus vajadzības gadījumā varētu paplašināt ar skaitlisku parametrizēšanu; lai visa testu jautājumu kopuma apgūšana dotu skaitļu teorijas pamatzināšanas Latvijas olimpiādēm (un daļēji arī starptautiskām sacensībām: IMO, EGMO, "Baltijas ceļš") nepieciešamajā līmenī. Skaitļu teorijas pamatzināšanas nav vienīgais, kas vajadzīgs risinātājiem, jo ir vajadzīga arī psiholoģiskā gatavība, koncentrēšanās, radoša veiksme, kā arī spēja pierakstīt olimpiādes darbu īsajā tam atvēlētajā laikā. Bet attiecīgs tests var būt vismaz "ieejas biļete" šajā sacensību matemātikas pasaulē.
Testu jautājumus paredzam veidot empīriski, izmantojot Latvijas novadu olimpiāžu un atklāo olimpiāžu uzdevumus no 2000.g. līdz 2016.g. Testus gatavojām 5 soļos:

1) No olimpiāžu komplektiem izraksta visus skaitļu teorijas uzdevumus. Sk. Nodaļas 3 un 4.
2) Atbilstoši uzdevumiem pierakstīti ieteikumi – līdz 140 simboliem. Sk. Nodaļu 6.
3) Katrā ieteikumā ietvertas 1–3 rūtiņbirkas (jeb *hashtags*), kas apraksta tēmu vai metodi. Rūtiņbirkas apkopotas Tabulā 5.
4) Rūtiņbirkām un atrisinājuma struktūrai atbilstošās prasmes minētas Nodaļā 1).
5) Katrai prasmei veido testu jautājumus Nodaļā 2).

Piezīmes par uzdevumu tekstu lasīšanu

Parasti olimpiāžu uzdevumi pierakstīti tā, ka vismaz skolotāji vai pulciņu vadītāji viennozīmīgi saprot nosacījumus. Tomēr ir arī tādi, kas var samulsināt arī pieredzējušus risinātājus. Daži piemēri:

1) Uzdevums Ao2009.8.4 apraksta neiespējamu situāciju. Risinājumā tad jāmēģina analizēt, kādēļ nosacījumi ir pretrunīgi.
2) Uzdevums Ao2012.8.1 nemin, vai atļauts izmantot unāro mīnusu. Skaitli 14 var iegūt 2 veidos: $(4-1-5)\cdot(-7) = 4 : (1-5 : 7)$, bet pirmais veids izmanto papildu operāciju. Citu būtisku iemeslu dot priekšroku otrajam atrisinājumam nav – "iziešana" no pozitīvo skaitļu kopas nav aizliegta gluži tāpat kā "iziešana" no veselo skaitļu kopas. (Arī Ao2010.8.1, Ao2011.8.1 nenosaka unārā mīnusa lietošanu; un arī šajos uzdevumos šī operācija nav nepieciešama.)

1. Prasmes skaitļu teorijā

1.1. Algebra

Algebriskas identitātes

- (al.identity.sqdiff) Izmanto identitāti $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
  No2010.8.1, No2012.8.1, No2013.8.1, Ao2015.8.3, Ao2016.8.1
- (al.identity.squareofsum) Izmanto identitāti $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.
  Ao2000.7.1, Ao2015.8.1

Algebriski pārveidojumi

- (al.manipulate.fractionsum) Izsaka skaitli vai mainīgo kā daļu summu.
  No2006.7.4
- (al.manipulate.smallexpr) Īsina līdzīgos locekļus nelielās izteiksmēs.
  Ao2001.8.3, Ao2002.8.2, Ao2003.8.5, Ao2010.8.2, Ao2016.8.1
- (al.manipulate.dottedexpr) Īsina līdzīgos locekļus izteiksmēs ar daudzpunktu.
  No2010.8.1
- (al.manipulate.fullsquare) Atdala pilnu kvadrātu kvadrāttrinomā.
  No2006.8.1

Simetrijas izmantošana pārveidojumos

- (al.sym.grouping) Grupē saskaitāmos vai reizināmos pēc kādas pazīmes.
  No2011.7.1, Ao2002.7.5, Ao2003.8.5, Ao2008.8.3
- (al.sym.progressions) Summē veselu skaitļu aritmētiskas progresijas.
  No2000.8.5, Ao2003.7.5, Ao2009.7.3, Ao2013.7.3
- (al.sym.recurrent) Definē rekurentas virknes un skaitļo to locekļus.
  Ao2004.8.5
- (al.sym.linear) Izmanto lineāras sakarības uzdevumu vienkāršošanā.
  No2009.8.1, Ao2010.7.3

Pakāpju īpašības

- (al.power.identity.add) Pārveido pakāpi $a^{b \pm c}$ par reizinājumu vai dalījumu.
  No2007.7.1, No2008.7.1, No2009.7.1, No2013.8.4
- (al.power.identity.distribute) Pārveido pakāpi $(ab)^k$ par reizinājumu.
  Ao2008.7.2

Vienādojumi

- (al.equation.expressvariable) Izsaka vienu mainīgo no lineāras sakarības.
  Ao2010.8.2, Ao2013.8.1, Ao2014.7.4, Ao2014.8.2, Ao2014.8.5, Ao2016.7.2
- (al.equation.mean) Izsaka vienkāršu vai svērtu aritmētisko vidējo.
  No2008.7.3, Ao2012.8.3
- (al.equation.invariant) Izmanto algebrisku izteiksmi kā invariantu.
  No2000.7.5, No2015.7.2, No2015.8.2

- (al.equation.recombine) Izsaka vienu un to pašu kā dažādas summas.
  No2000.8.5
- (al.equation.substitute) Vienkāršo vienādojumu, ievietojot mainīgajos.
  No2016.7.5, Ao2001.7.2

Nevienādības

- (al.inequality.intervals) Secina par veselu skaitļu intervāliem un galapunktiem.I
  No2001.7.1, Ao2004.8.5, Ao2006.7.1
- (al.inequality.estimates) Novērtē veselu skaitļu summas vai reizinājumus.
  No2004.8.2, No2005.8.1, Ao2001.8.3, Ao2002.8.2
- (al.inequality.extremalelement) Pamato neiespējamību ar ekstremālo elementu.
  No2002.8.3, Ao2002.8.3, Ao2003.8.3
- (al.inequality.finitesearch) Pamato meklējumu telpas galīgumu ar nevienādību.
  No2008.7.3, No2013.7.1, Ao2007.8.3, Ao2012.8.3, Ao2016.7.2
- (al.inequality.fractions) Izmanto daļskaitļu nevienādības veselu skaitļu aritmētikā.
  No2005.7.4, No2006.7.4
- (al.inequality.monotonicity) Atrod, kādai mainīgā vērtībai izteiksme ir lielākā/mazākā.
  Ao2013.7.1

1.2. Kombinatorika

Skaitīšana, Gadījumu pārlase

- (co.fullsearch.construction) Pārlasa variantus līdz iegūta konstrukcija.
  No2000.8.5, No2001.7.4, No2015.7.3, Ao2000.7.4, Ao2003.7.5, Ao2003.8.5, Ao2009.7.3, Ao2009.8.4, Ao2016.8.3
- (co.fullsearch.summation) Sadala skaitli saskaitāmajos ar noteiktām īpašībām.
  Ao2005.7.4, Ao2005.8.3
- (co.fullsearch.opposite) Saskaita pretējam notikumam atbilstošos variantus.
  No2013.8.3, No2014.8.3

Reizināšanas likums

- (co.multrule.permutation) Izmantot reizināšanas likumu permutāciju atrašanai.
  No2013.8.3, No2014.8.3

Tabulas un Krāsošana

- (co.tables.chess) Izmantot šaha galdiņa krāsojumu, lai konstruētu skaitļu tabulas.
  No2015.7.3
- (co.tables.magicsquare) Konstruē maģiskos kvadrātus un tiem radniecīgas tabulas.
  No2013.8.4, Ao2010.7.3, Ao2014.7.4, Ao2014.8.5

Dirihlē princips

- (co.pigeonhole.statement) Pierāda vai apgāž apgalvojumus ar Dirihlē principu.
  No2001.7.4, Ao2002.7.5

- (co.pigeonhole.meanvalue) Novērtē saskaitāmos, izmantojot vid.vērtības metodi.
  No2000.7.4, Ao2000.7.4, Ao2000.8.3

Matemātiskā indukcija

- (co.induction.infinitedescent) Pamato procesa galīgumu ar naturāla skaitļa samazinājumu.
  Ao2007.7.3
- (co.induction.plus1) Veic induktīvos pierādījumus pēc shēmas $n \to n+1$.
  Ao2000.8.3

Grafi

- (co.graph.bipartite) Iezīmē grafā virsotņu pārīšus, lai pierādītu novērtējumu
  No2003.7.4, No2004.7.1, No2013.7.1, Ao2002.7.4
- (co.graph.path) Atrod ceļu grafā pie zināmiem nosacījumiem.
  Ao2007.7.1
- (co.graph.bfs) Atrod konstrukciju, apstaigājot koku plašumā.
  No2012.7.1
- (co.graph.syntaxtree) Analizē sintakses kokus.
  Ao2010.8.1, Ao2011.8.1, Ao2012.8.1

Algoritmi un Spēles

- (co.games.strategy) Pamato uzvarošu stratēģiju ar loģisku spriedumu.
  No2005.8.3, Ao2002.7.4, Ao2003.7.3, Ao2007.7.3
- (co.games.invariant) Apraksta uzvarošu pozīciju ar invariantu.
  Ao2011.8.5
- (co.games.nonconstructive) Pamato uzvarošas stratēģijas esamību, nekonstruējot to.
  Ao2002.7.4, Ao2003.7.3

1.3. Dalāmība

Dalāmības pamatīpašības

- (nt.divisibility.multiples) Nosaka skaitļu daudzkārtņu biežumu un izvietojumu.
  No2007.8.4, No2008.7.3, No2010.7.3, No2011.7.2, No2013.7.2, No2014.7.3, Ao2004.8.3, Ao2006.7.1
- (nt.divisibility.constructions) Veido skaitļus, kas apmierina apgalvojumus par dalāmību.
  No2001.8.3, No2005.8.3, Ao2000.7.2, Ao2011.7.3
- (nt.divisibility.numdivisors) Nosaka skaitļa dalītāju skaitu un struktūru.
  No2009.7.3, Ao2008.8.3
- (nt.divisibility.equation) Izmanto dalāmības īpašības, risinot vienādojumus.
  Ao2016.7.2

Dalāmība ar 3 un 9

- (nt.divrules3and9.plain) Pazīst un konstruē skaitļus, kas dalās ar 3 vai 9.
  No2016.7.2, Ao2013.7.3, Ao2015.7.3, Ao2016.8.3

- (nt.divrules3and9.permutations) Veic ciparu manipulācijas, neizmainot dalāmību ar 3 vai 9.
  No2010.8.3, No2011.8.1

Dalāmība ar $2^k 5^m$

- (nt.divrules2and5.plain) Pazīst un konstruē skaitļus, kas dalās ar 2 vai 5.
  Ao2006.8.3
- (nt.divrules2and5.lastdigit) Pazīst pēc pēdējā cipara skaitļus, kas ir salikti.
  No2001.8.3, No2016.8.2, Ao2013.7.3, Ao2016.8.3
- (nt.divrules2and5.zeroes) Secina par 2^k, 5^k pirmreizinātājiem pēc nuļļu skaita.
  Ao2005.7.4, Ao2008.7.2

Dalāmība ar citiem skaitļiem

- (nt.divrulesother.11) Pazīst un konstruē 11 daudzkārtņus, aplūkojot pamīšus ciparus.
  No2012.8.3, No2016.7.2, Ao2015.7.3
- (nt.divrulesother.101) Pazīst un konstruē 101 daudzkārtņus, aplūkojot ciparu pārus.
  No2012.7.4

1.4. Atlikumi

Atlikumu aprēķināšana

- (nt.remainder.plain) Aprēķina atlikumus un secina par dalāmību.
  No2001.7.1, Ao2006.7.1
- (nt.remainder.map) Pāriet no skaitļiem uz atlikumiem.
  No2006.8.3, No2009.8.1, No2009.8.3, No2011.7.1, No2015.8.1
- (nt.remainder.invariant) Izmantot atlikumu ar $n > 2$ kā invariantu.
  No2002.8.3, No2013.7.4, No2015.7.2, No2015.8.2, Ao2009.7.5, Ao2010.7.4

Paritāte

- (nt.parity.operations) Secina par summu, starpību, reizinājumu paritāti.
  No2000.8.5, No2003.7.4, No2005.7.4, No2015.7.3, Ao2009.7.3, Ao2012.7.1, Ao2014.7.2, Ao2016.8.2
- (nt.parity.invariant) Izmanto paritāti kā invariantu.
  No2002.7.3, No2002.8.3, No2004.7.1, No2008.8.1, Ao2003.7.5

Periodiskas virknes

- (nt.periodic.remainders) Pazīst gadījumus, kad atlikumi veido periodiskas virknes.
  Ao2000.7.2
- (nt.periodic.longdivision) Lieto "dalīšanu stabiņā" uzdevumu risināšanai.
  Ao2014.8.1
- (nt.periodic.powers) Nosaka skaitļa pakāpju atlikumu vai pēdējo ciparu periodiskumu.
  No2009.8.3
- (nt.periodic.invariant) Izmanto virknes periodiskumu invariantu spriedumos.
  No2006.8.3, Ao2012.8.4

Decimālpieraksts

- (nt.decnotation.sumofdigits) Veido piemērus, izmantojot skaitļa ciparu summas īpašības.
  No2000.7.4, No2008.8.1, Ao2006.8.3, Ao2007.7.3
- (nt.decnotation.expressions) Secina vienādības un nevienādības no decimālpieraksta.
  No2010.8.3, No2011.8.1, Ao2001.8.3, Ao2002.8.2, Ao2004.8.3, Ao2011.8.4, Ao2013.7.1, Ao2013.8.1, Ao2014.8.1, Ao2014.8.2
- (nt.decnotation.transform) Izprot izmaiņas pierakstā, skaitli saskaitot vai reizinot.
  No2004.8.2, No2005.8.1, No2012.7.1

1.5. Pirmskaitļi un pirmreizinātāji

Pirmskaitļu izvietojums

- (nt.primes.small) Pazīst pirmskaitļus līdz 100.
  No2002.7.3, No2004.7.1, No2010.8.1, No2015.7.3, Ao2000.7.4, Ao2003.8.3, Ao2007.7.1, Ao2009.7.3, Ao2010.7.1, Ao2011.7.1, Ao2015.8.3
- (nt.primes.distances) Izmanto pirmskaitļu izvietojumu pierādījumos un konstrukcijās.
  Ao2000.7.4, Ao2010.7.1, Ao2011.7.1

Sadalījums pirmreizinātājos

- (nt.factorization.plain) Sadala pirmreizinātājos un secina, kādi var būt dalītāji.
  No2003.8.3, No2004.8.1, No2007.7.1, No2008.7.1, No2009.7.1, No2012.8.3, Ao2007.8.3, Ao2009.8.4, Ao2010.7.1, Ao2011.8.4
- (nt.factorization.powers) Pazīst pilnas pakāpes pēc sadalījuma pirmreizinātājos.
  No2009.7.3, No2010.7.3, No2011.7.2, Ao2013.7.3
- (nt.factorization.divisibilityrules) Izsaka $a \mid x$ kā dalāmību ar pirmskaitļu pakāpēm.
  No2013.7.2, No2014.7.3, No2016.7.2, Ao2001.7.2, Ao2008.7.2, Ao2016.8.3

1.6. LKD un MKD

Lielākais kopīgais dalītājs (LKD)

- (nt.gcd.fixeddiff) Novērtē $\mathrm{LKD}(\ldots)$ skaitļiem ar fiksētu attālumu.
  No2001.7.4
- (nt.gcd.construct) Atrod x, kam $\mathrm{LKD}(x, n_i)$ pieņem vajadzīgās vērtības.
  No2005.8.3, Ao2004.7.3
- (nt.gcd.bezout) Izsaka $ax + by = 1$ (arī papildus prasot, lai $a > 0$ vai $b > 0$).
  No2007.7.1, No2008.7.1, No2009.7.1
- (nt.gcd.congruences) Risina lineāras kongruences vai to sistēmas.
  Ao2011.7.3

Mazākais kopīgais dalāmais (MKD)

- (nt.lcm.construction) Atrod skaitli, kas dalās ar visiem nosauktajiem skaitļiem.
  No2007.8.4

Nesaīsināmas daļas

- (nt.irreducible.plain) Lieto pazīmes, kas raksturo nesaīsināmas daļas.
  Ao2004.7.3
- (nt.irreducible.squareroot) Pamato, ka $\sqrt{n}$ ir iracionāla, pieņemot, ka tā ir p/q.
  Ao2015.8.1

2. Testu jautājumi

2.1. Algebra

(al.identity.sqdiff) **Sadalīt vai sareizināt:** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Jaut. 2.1. Izteikt skaitli 809999 kā 3 dažādu skaitļu reizinājumu, kas visi lielāki par 1.

A: `901*31*29` (No2013.8.1.)
Izsaka pēc kvadrātu starpības formulas: $809999 = 30^4 - 1 = (30^2+1)(30^2-1) = (30^2+1)(30+1)(30-1)$. $\square$

(al.inequality.fractions) **Izmantot daļskaitļu nevienādības veselu skaitļu aritmētikā**

Jaut. 2.2. *Pasakā par kamieļiem kāds tēvs atstāj dēliem mantojumā 17 kamieļus (vienam dēlam jāsaņem* $1/2$*, otram* $1/3$*, trešam* $1/9$*). Lai tos sadalītu, kāds ceļotājs pievienoja savu kamieli, lai vienam sanāktu* $18/2 = 9$*, otram* $18/3 = 6$*, trešam* $18/9 = 2$*. Bet* $9+6+2 = 17$*, tādēļ ceļotājs savu kamieli dabūja atpakaļ.* Cik kamieļiem jābūt atstātiem mantojumā, lai ceļotājs pievienojot savu kamieli, varētu sadalīt mantojumu proporcijās $1/2$, $1/4$, $1/5$ un beigās dabūt savu kamieli atpakaļ?

A: `19` (No2005.7.4.)
Daļas $1/2$, $1/4$, $1/5$ saskaita un rezultātu atņem no 1. Kamieļu skaitam jābūt tādam, lai iegūtā daļa būtu tieši viens kamielis. $\square$

Jaut. 2.3. Vai eksistē tāds nepāru skaitlis, kas dalās ar 5, 7 un 9 un ir vienāds ar četru savu dalītāju summu?

A: `NĒ` (No2005.7.4.)
Ja skaitlis n dalās ar 9, tas dalās arī ar 3. Skaitlis n nevar būt vienāds pats ar sevi, kam vēl kaut kas pieskaitīts. Tādēļ lielākie skaitļa dalītāji ir $n/3$, $n/5$, $n/7$ un $n/9$. Tos visus saskaitot iegūsim skaitli, kas mazāks par n. $\square$

2.2. Atlikumi

(al.decnotation.expressions) **Secināt vienādības un nevienādības no decimālpieraksta vai otrādi**

Jaut. 2.4. Ar $d(n)$ apzīmējam skaitļa n decimālpieraksta ciparu summu. Ierakstīt 4 mazākās vērtības, kādas var pieņemt $|d(n+7) - d(n)|$ jebkuram n. (4 skaitļi, atdalīti ar komatiem.)

A: `2,7,11,16` (No2000.7.4.)

Jaut. 2.5. Ar $d(n)$ apzīmējam skaitļa n decimālpieraksta ciparu summu. Zināms, ka n un m ir dažādi naturāli skaitļi; un $d(n)$, $d(m)$ dalās ar 5. Kādi ir četri mazākie iespējamie attālumi $|n-m|$ starp abiem skaitļiem?

A: `1,2,3,4` (No2000.7.4.)

3. Novadu olimpiāžu uzdevumi 7. – 8. klasei

Uzd. No2000.7.4. Naturālu skaitli sauc par interesantu, ja tā ciparu summa dalās ar 5.

(a) atrast kaut vienu tādu interesantu x, ka arī $x + 9$ ir interesants,

(b) cik pavisam ir tādu interesantu x, kādi minēti (a) punktā?

(c) pierādīt: starp jebkuriem 9 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem ir vismaz viens interesants.

(Sk. (25))

Uzd. No2000.7.5. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{3}$. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un to vietā uzrakstīt uz tāfeles skaitļus $\frac{b^2}{a}$ un $\frac{a^2}{b}$. Vai, izdarot vairākus šādus gājienus pēc kārtas, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos skaitļi $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{2}$? (Sk. (81))

Uzd. No2000.8.5. Tabula sastāv no $n \times n$ rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta 0, 1 vai 2 tā, lai, aprēķinot rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas, iegūtu visus naturālos skaitļus no 1 līdz $2n$, katru vienu reizi. Vai to var izdarīt, ja
(a) $n = 5$, **(b)** $n = 6$? (Sk. (88))

Uzd. No2001.7.1. Divos pēc kārtas sekojošos gados katrā ir 365 dienas. Pirmajā no tiem sestdienu ir vairāk nekā trešdienu. Kuru nedēļas dienu otrajā gadā ir visvairāk? (Sk. (47))

Uzd. No2001.7.4. Virknē uzrakstīti cipari no 1 līdz 9 (skat. zīmējumu):

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

Kādu lielāko daudzumu semikolu var ievietot starp blakus esošiem cipariem, lai tie sadalītu ciparu virkni tādu naturālu skaitļu pierakstos, no kuriem katriem diviem lielākais kopīgais dalītājs ir 1? (Piemēram, $123; 45678; 9$ neder, jo 123 un 9 abi dalās ar 3.) (Sk. (57))

Uzd. No2001.8.3. Uzrakstiet kaut vienu desmitciparu skaitli, kam visi cipari ir dažādi un kam piemīt īpašība: izsvītrojot jebkurus n ciparus (n – jebkurš naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 6), atlikušie cipari (tai pašā secībā) veido saliktu skaitli. Pamatojiet savu risinājumu. (Sk. (20))

Uzd. No2002.7.3. Uz tāfeles uzrakstīti naturālie skaitļi no 3 līdz 10 ieskaitot, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu atļauts diviem uz tāfeles esošiem skaitļiem vienlaicīgi pieskaitīt pa vieniniekam. Kāds lielākais dažādu pirmskaitļu daudzums var vienlaikus atrasties uz tāfeles? (Sk. (82))

Uzd. No2002.8.3. Burtnīcā ir 100 lapas; tās lappuses saunumurētas dabīgā kārtībā ar numuriem no 1 līdz 200. Vai izrauto lappušu numuru summa var būt 1000, ja tiek izrautas
(a) 31 lapa; **(b)** 30 lapas? (**Piezīme:** lapas var neraut pēc kārtas.) (Sk. (77)i)

Uzd. No2003.7.4 (No2005.7.1). Kādu mazāko daudzumu no skaitļiem
$1; 2; 3; \ldots; 12; 13$ var izsvītrot, lai katru divu atlikušo summa būtu salikts skaitlis? (Sk. (58))

Uzd. No2003.8.3. Kādu mazāko daudzumu no naturāliem skaitļiem $1; 2; 3; \ldots; 12$ var izsvītrot, lai atlikušos varētu sadalīt divās grupās ar īpašību: vienas grupas visu skaitļu reizinājums vienāds ar otras grupas visu skaitļu reizinājumu. (Sk. (61))

Uzd. No2004.7.1. Kādu mazāko daudzumu no skaitļiem $1; 2; 3; \ldots; 14; 15$ var izsvītrot, lai katru divu atlikušo summa būtu salikts skaitlis? (Sk. (59))

Uzd. No2004.8.1. Kādu mazāko daudzumu no naturāliem skaitļiem $1; 2; 3; \ldots; 14; 15$ var izsvītrot, lai atlikušos varētu sadalīt divās grupās ar īpašību: vienas grupas visu skaitļu reizinājums vienāds ar otras grupas visu skaitļu reizinājumu? (Sk. (60))

Uzd. No2004.8.2. Ir zināms, ka skaitļa 2^{200} decimālajā pierakstā ir 61 cipars. Cik daudziem no skaitļiem $2^1; 2^2; 2^3; \ldots; 2^{199}; 2^{200}$ decimālais pieraksts sākas ar ciparu 1? (Sk. (97))

Uzd. No2005.7.4. Naturālu skaitli n sauc par īpašu, ja tas ir vienāds ar četru savu dažādu dalītāju summu.

(a) atrodiet kaut vienu īpašu skaitli,

(b) pierādiet, ka īpašu skaitļu ir bezgalīgi daudz,

(c) pierādiet, ka visi īpaši skaitļi ir pāru skaitļi.

(Sk. (14)i)

Uzd. No2005.8.1. Ir zināms, ka skaitļa 2^{100} decimālajā pierakstā ir 31 cipars. Cik daudziem no skaitļiem $2^1; 2^2; 2^3; \ldots; 2^{99}; 2^{100}$ decimālais pieraksts sākas ar ciparu 1? (Sk. (98))

Uzd. No2005.8.3. Andris iedomājās patvaļīgu naturālu skaitli n. Juris ar vienu gājienu var pateikt Andrim piecus dažādus naturālus skaitļus x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, un Andris pateiks Jurim **vienu** no skaitļiem $nx_1, nx_2, nx_3, nx_4, nx_5$ (bet nepaskaidros, **kura** reizinājuma vērtību viņš saka). Ar kādu mazāko jautājumu skaitu Juris var noteikti noskaidrot n? (Sk. (38))

Uzd. No2006.7.4 (No2007.7.4). Kuri naturālie skaitļi ir vienādi ar trīs savu dažādu pozitīvu dalītāju summu? (Sk. (13))

Uzd. No2006.8.1. Ir zināms, ka visiem x pastāv vienādība

$$x^4 + 64 = (x^2 - 4x + 8) \cdot A,$$

kur A ir izteiksme, kas izveidota no x un naturāliem skaitļiem ar saskaitīšanas, atņemšanas un reizināšanas operāciju palīdzību. Atrast A. (Sk. (2))

Uzd. No2006.8.3. Vai var izrakstīt rindā visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2006 ieskaitot katru vienu reizi tā, lai katru 3 pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa dalītos ar 4. (Sk. (83))

Uzd. No2007.7.1. Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n = \dfrac{x}{y}$, kur $x = a^5$, $y = b^3$, a un b – naturāli skaitļi? (Sk. (43)i)

Uzd. No2007.8.4. Atrast mazāko naturālo skaitli, kas dalās ar katru no kaut kādiem 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem. (Sk. (86)i)

Uzd. No2008.7.1. Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n = \frac{x}{y}$, kur $x = a^3$, $y = b^4$, a un b – naturāli skaitļi? (Sk. (42)i)

Uzd. No2008.7.3. Sporta klubā sapulcējušies cīkstoņi un vingrotājas. Cīkstoņu vidējais svars ir 84 kg; vingrotāju vidējais svars ir 54 kg; visu sportistu vidējais svars ir 71 kg. Pierādīt, ka cīkstoņu skaits dalās ar 17. (Sk. (93))

Uzd. No2008.8.1. Sešciparu naturālu skaitli sauc par laimīgu, ja kaut kādu 3 ciparu summa vienāda ar pārējo 3 ciparu summu. Divi viens otram sekojoši skaitļi ir laimīgi. Pierādīt, ka viens no tiem dalās ar 10. (Sk. (54))

Uzd. No2009.7.1. Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n = \dfrac{x}{y}$, kur $x = a^3$, $y = b^5$, a un b – naturāli skaitļi? (Sk. (41)i)

Uzd. No2009.7.3. Naturālam skaitlim a ir tieši 4 dalītāji, bet naturālam skaitlim b – tieši 6 dalītāji. Pierādiet, ka reizinājumam ab ir **vismaz** 9 dalītāji. Vai var gadīties, ka šim reizinājumam ir **tieši** 9 dalītāji? (**Piezīme:** Apskatām tikai tādus dalītājus, kas paši ir naturāli skaitļi. Pie skaitļa dalītājiem pieskaita gan viņu pašu, gan vieninieku.) (Sk. (44))

Uzd. No2009.8.1. Tabulā (sk. zīmējumu) Katrīnai jāizvēlas 4 rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā tika izvēlēta tieši viena rūtiņa. Pierādiet: neatkarīgi no tā, kuras 4 rūtiņas saskaņā ar šiem noteikumiem Katrīna izvēlēsies, tajās ierakstīto skaitļu summa būs 64.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

(Sk. (51))

Uzd. No2009.8.3. Atrodiet skaitļa $113^{113} - 19^{19}$ pēdējo ciparu. (Sk. (105))

Uzd. No2010.7.3. Cik ir tādu naturālu skaitļu x robežās no 1 līdz 2010 ieskaitot, ka $(x+1)(x+2)(x+3)$ dalās ar 343? (Sk. (30))

Uzd. No2010.8.1. Kuru no skaitļiem

$$102^2 \cdot 103^2 \cdot \ldots \cdot 199^2 \text{ un } (102^2-1)(103^2-1)\ldots(199^2-1)$$

sadalot pirmskaitļu reizinājumā, iegūst vairāk **dažādu** pirmskaitļu? Par cik vairāk? (**Paskaidrojums:** $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ satur divus dažādus pirmskaitļus; 2 un 3.) (Sk. (7))

Uzd. No2010.8.3. Četrciparu skaitlim pārlika ciparus citā kārtībā. Pierādīt: sākotnējā un iegūtā skaitļa starpība dalās ar 9. (Sk. (22))

Uzd. No2011.7.1. Atrodiet skaitļa $1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2$ pēdējo ciparu. (Sk. (109))

Uzd. No2011.7.2. Cik ir tādu naturālu skaitļu n no 1 līdz 2011 ieskaitot, ka skaitlis $(n+1)(n+2)(n+3)$ dalās ar 125. (Sk. (29))

Uzd. No2011.8.1. Piecciparu skaitlis B ir iegūts no mazāka piecciparu skaitļa A, samainot vietām tā ciparus. Pierādīt, ka $B - A$ dalās ar 9. (Sk. (21))

Uzd. No2012.7.1. Ar naturālu skaitli var veikt divu veidu operācijas:

(a) reizināt ar 7

(b) nodzēst skaitļa lielāko (vienu no lielākajiem, ja tādi ir vairāki) ciparu.

Vai ar šādām operācijām no skaitļa 9 var iegūt skaitli 27, atkārtojot tās vairākas reizes jebkādā secībā? (Sk. (66))

Uzd. No2012.7.4. Pierādīt, ka 1004041 nav pirmskaitlis. (Sk. (27))

Uzd. No2012.8.1. Skaitli 3999991 uzrakstīt kā divu veselu skaitļu reizinājumu tā, lai katrs no reizinātājiem ir lielāks nekā 1. (Sk. (1))

Uzd. No2012.8.3. Vai naturāla skaitļa ciparu reizinājums var būt skaitlis $\overline{aabbcc}$? (Pieraksts $\overline{kmn}$ nozīmē, ka skaitlī ir k simti, m desmiti un n vieni.) (Sk. (17))

Uzd. No2013.7.1. Naturālie skaitļi no 1 līdz 18 sadalīti pa pāriem tā, ka katrā pārī esošo skaitļu summa ir naturāla skaitļa kvadrāts. Ar ko pārī apvienots skaitlis 1?
Par skaitļa kvadrātu sauc skaitļa reizinājumu pašam ar sevi. (Sk. (65))

Uzd. No2013.7.2. Cik starp pirmajiem 2013 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x, ka skaitlis $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 111? (Sk. (31))

Uzd. No2013.7.4. Vai pa riņķi var uzrakstīt 13 naturālus skaitļus tā, lai jebkuru blakus esošu skaitļu starpība būtu 6, 10, 14 vai 18? (Sk. (80))

Uzd. No2013.8.1. Skaitli 8999999 uzraksti kā divu veselu skaitļu reizinājumu tā, lai katrs no reizinātājiem ir lielāks nekā 1. (Sk. (4))

Uzd. No2013.8.3. Cik ir tādu četrciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens pāra cipars? (Sk. (107))

Uzd. No2013.8.4. Kvadrātā 3×3 rūtiņas ieraksti deviņus dažādus naturālus skaitļus tā, lai katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums būtu viens un tas pats. (Sk. (94))

Uzd. No2014.7.3. Cik starp pirmajiem 2014 naturālajiem skaitļiem ir tādu skaitļu x, ka skaitlis $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 87? (Sk. (32))

Uzd. No2014.8.3. Cik ir tādu piecciparu skaitļu, kuru pierakstā ir vismaz viens nepāra cipars? (Sk. (108))

Uzd. No2015.7.2. Sensenos laikos saimnieciskajam Gotfrīdam bija 99 aitas un 21 kamielis, citu mājlopu Gotfrīdam nebija. Bagdādē par 4 kamieļiem pretī varēja saņemt 8 aitas, bet Damaskā par 5 aitām pretī varēja saņemt 3 kamieļus. Vai, atkārtoti mainot dzīvniekus tikai šajās divās pilsētās, Gotfrīds varēja iegūt tieši 2015 mājlopus? (Sk. (78))

Uzd. No2015.7.3. Tabulā, kuras izmēri ir 3×3 rūtiņas, katrā rūtiņā ierakstīts viens naturāls skaitlis, kas nepārsniedz 10, visi ierakstītie skaitļi ir dažādi. Katrām divām rūtiņām ar kopīgu malu aprēķina tajos ierakstīto skaitļu summu. Vai iespējams, ka visas iegūtās summas ir pirmskaitļi? (Sk. (67))

Uzd. No2015.8.1. Pierādi, ka

(a) $49^5 + 7^9$ dalās ar 2;

(b) $49^5 - 7^9$ dalās ar 6.

(Sk. (48))

Uzd. No2015.8.2. Autoservisā "Šrotiņš" ir 39 mašīnas. Naskais Maigonis katra mēneša $20.$ datumā vai nu pārdod 7 restaurētas mašīnas un to vietā nopērk 16 vecas mašīnas, vai arī 19 mašīnas nodod metāllūžņos un to vietā nopērk 4 vecas mašīnas. Nekādas citas darbības, kas maina mašīnu skaitu, netiek veiktas. Vai iespējams, ka "Šrotiņā" kāda mēneša $21.$ datumā būs tieši 2015 mašīnas? (Sk. (79))

Uzd. No2016.7.2. Dots naturāls skaitlis, kas dalās ar 99 un kura pēdējais cipars nav 0. Pierādi, ka uzrakstot šī skaitļa ciparus pretējā secībā, arī iegūst skaitli, kas dalās ar 99. (Sk. (18))

Uzd. No2016.7.5. (a) Vai var atrast dažādus veselus skaitļus a, b, c un d tādus, ka izpildās vienādības $a + b = cd$ un $ab = c + d$?

(b) Vai šādus skaitļus var atrast, ja papildus zināms, ka $a > 2016$?

(Sk. (62)i)

Uzd. No2016.8.2. Karlīna uzrakstīja divus skaitļus, kuru pierakstā nav izmantots cipars 0. Katru ciparu viņa aizstāja ar burtu: dažādus ciparus – ar dažādiem burtiem, vienādus – ar vienādiem. Viens no uzrakstītajiem skaitļiem *DUBĻUNNN* dalās ar 104. Pierādi, ka otrais skaitlis *BURBUĻVANNA* nedalās ar 56. (Sk. (24))

4. Atklāto olimpiāžu uzdevumi 7. – 8. klasei

Uzd. Ao2000.7.1 (Ao2001.7.1). Dots, ka a, b, c, d – naturāli skaitļi un $ab = cd$. Pierādīt, ka skaitli $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ var izsacīt kā divu veselu skaitļu kvadrātu summu. Vai to noteikti var izsacīt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu? (Sk. (25))

Uzd. Ao2000.7.2. Atrast mazāko naturālo skaitli, kam visi cipari ir vienādi un kas dalās ar 49? (Sk. (81))

Uzd. Ao2000.7.4. Vai naturālos skaitļus

(a) no 1 līdz 12 ieskaitot,

(b) no 1 līdz 50 ieskaitot

var tā sadalīt pa pāriem, lai visas pāros ieejošo skaitļu summas būtu dažādas un katra no tām būtu pirmskaitlis? (Piemēram, skaitļus no 1 līdz 6 varētu sadalīt tā: $1 + 2 = 3$, $3 + 4 = 7$, $5 + 6 = 11$). (Sk. (88))

Uzd. Ao2000.8.3. Uz katras no vairākām kartītēm uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi); uz visām kartītēm uzrakstīto skaitļu summa ir 100. Vai noteikti var atrast tādas kartītes (varbūt vienu pašu), uz kurām uzrakstīto skaitļu summa ir 50, ja kartīšu skaits ir

(a) 50,

(b) 51?

(Sk. (47))

Uzd. Ao2001.7.2. Naturālu skaitli sauc par simetrisku, ja tā pēdējais cipars nav 0 un, uzrakstot tā ciparus apgrieztā secībā, skaitlis nemainās. Piemēram, 1221 ir simetrisks skaitlis, bet 1231 - nav.

(a) pierādiet: ja simetrisks sešciparu skaitlis dalās ar 13, tad tas dalās arī ar 7,

(b) vai taisnība, ka katrs simetrisks sešciparu skaitlis, kas dalās ar 7, dalās arī ar 13?

(Sk. (57))

Uzd. Ao2001.8.3 (Ao2003.8.2). Andrim vajadzēja sareizināt divus dažādus pozitīvus trīsciparu skaitļus. Izklaidības pēc viņš tos vienkārši uzrakstīja vienu otram galā. Iegūtais sešciparu skaitlis izrādījās 3 reizes lielāks par reizinājumu, kuru Andrim vajadzēja iegūt. Kādu sešciparu skaitli Andris uzrakstīja? (Sk. (20))

Uzd. Ao2002.7.4. Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 8 ieskaitot. Nedrīkst rakstīt skaitļus, ar kuriem dalās kaut viens jau uzrakstīts skaitlis. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Parādiet, kā tas, kas izdara pirmo gājienu, var uzvarēt. (Sk. (82))

Uzd. Ao2002.7.5. Kādu lielāko daudzumu dažādu naturālu skaitļu, kas nepārsniedz 100, var izvēlēties tā, lai nekādu divu izvēlēto skaitļu starpība nebūtu ne 3, ne 4, ne 7? (Sk. (77)i)

Uzd. Ao2002.8.2. Andrim vajadzēja sareizināt divus dažādus divciparu skaitļus. Izklaidības pēc viņš tos vienkārši uzrakstīja vienu otram galā. Iegūtais četrciparu skaitlis izrādījās 3 reizes lielāks par reizinājumu, kuru Andrim vajadzēja iegūt. Kādu četrciparu skaitli Andris uzrakstīja? (Sk. (58))

Uzd. Ao2002.8.3 (Ao2005.8.2). Par Fibonači skaitļiem sauc skaitļus $1; 2; 3; 5; 8; \ldots$ (katru nākošo iegūst, saskaitot divus iepriekšējos). Vai var pastāvēt vienādība $a + b = c + d$, ja a, b, c, d ir dažādi Fibonači skaitļi? (Sk. (61))

Uzd. Ao2003.7.3. Divi spēlētāji pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 9 ieskaitot. Nedrīkst rakstīt skaitļus, ar kuriem dalās kaut viens jau uzrakstīts skaitlis. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Parādiet, kā tas, kas izdara pirmo gājienu, var uzvarēt. (Sk. (59))

Uzd. Ao2003.7.5. Uz tāfeles pa reizei uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz n ieskaitot. Ar vienu gājienu var izvēlēties divus uz tāfeles uzrakstītus skaitļus (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un to

vietā uzrakstīt $\left|a^2 - b^2\right|$. Pēc $n-1$ gājiena uz tāfeles paliek viens skaitlis.
Vai tas var būt 0, ja **(a)** $n = 8$, **(b)** $n = 9$? (Sk. (60))

Uzd. Ao2003.8.3. Kādā lielākajā daudzumā dažādu naturālu saskaitāmo, kas visi lielāki par 1, var sadalīt skaitli 56 tā, lai katru divu saskaitāmo lielākais kopīgais dalītājs būtu 1? (Sk. (97))

Uzd. Ao2003.8.5. Uz katras no divām lapām jāuzraksta pa n veseliem pozitīviem skaitļiem. Visiem $2n$ uzrakstītajiem skaitļiem jābūt dažādiem. Pie tam uz lapām uzrakstīto skaitļu summām jābūt vienādām savā starpā, un uzrakstīto skaitļu kvadrātu summām arī jābūt vienādām savā starpā.
Vai tas iespējams, ja **(a)** $n = 3$, **(b)** $n = 4$, **(c)** $n = 2003$? (Sk. (14)i)

Uzd. Ao2004.7.3 (Ao2005.7.2). Kādam mazākajam naturālajam n visas daļas

$$\frac{5}{n+7}, \frac{6}{n+8}, \frac{7}{n+9}, \ldots, \frac{35}{n+37}, \frac{36}{n+38}$$

ir nesaīsināmas? (Sk. (98))

Uzd. Ao2004.8.3. Dots, ka A un B – naturāli divciparu skaitļi. Skaitli X iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B; skaitli Y iegūst, pierakstot skaitlim B galā skaitli A. Dots, ka $X - Y$ dalās ar 91. Pierādīt, ka $A = B$. (Sk. (38))

Uzd. Ao2004.8.5. Virknē augošā kārtībā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 2004 ieskaitot, katrs vienu reizi. Izsvītrojam no tās skaitļus, kas atrodas $1., 4., 7., 10., \ldots$ vietās. No palikušās virknes atkal izsvītrojam skaitļus, kas tajā atrodas $1., 4., 7., \ldots$ vietās. Ar iegūto virkni rīkojamies tāpat, utt., kamēr paliek neizsvītrots viens skaitlis. Kurš tas ir? (Sk. (13))

Uzd. Ao2005.7.4 (Ao2006.7.2). Triju veselu pozitīvu skaitļu summa ir 407. Ar kādu lielāko daudzumu nuļļu var beigties šo skaitļu reizinājums? (Sk. (2))

Uzd. Ao2005.8.3. Kā var sadalīt naturālos skaitļus no 1 līdz 9 ieskaitot divās daļās tā, lai vienas daļas visu skaitļu summa būtu vienāda ar otras daļas visu skaitļu reizinājumu? (Sk. (83))

Uzd. Ao2006.7.1. Vilcienā Rīga-Mehiko vietas numurētas ar naturāliem skaitļiem, sākot ar 1 (numerācija ir vienota visam vilcienam, t.i., ir tikai viena vieta ar numuru 1, viena vieta ar numuru 2 utt; numuri piešķirti virzienā no lokomotīves uz vilciena "asti"). Visos vagonos ir vienāds vietu skaits. Vietas ar numuriem 1996 un 2015 ir vienā vagonā, bet vietas ar numuriem 630 un 652 – dažādos vagonos, kas pie tam nav blakus viens otram. Cik vietu ir katrā vagonā? (Sk. (43)i)

Uzd. Ao2006.8.3. Naturāla skaitļa x ciparu summu apzīmēsim ar $S(x)$. Pieņemsim, ka n – tāds naturāls skaitlis, kam vienlaicīgi izpildās īpašības $S(n) = 10$ un $S(5n) = 5$.

(a) atrodiet kaut vienu tādu skaitli,

(b) vai tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz?

(c) vai kāds no tādiem skaitļiem ir nepāra?

(Sk. (86)i)

Uzd. Ao2007.7.1 (Ao2008.7.1). Kādu lielāko daudzumu dažādu ciparu var izrakstīt pa apli tā, lai katri divi blakus uzrakstīti cipari, lasot tos vienalga kādā virzienā, veidotu pirmskaitļa pierakstu? (Sk. (42)i)

Uzd. Ao2007.7.3. Uz tāfeles sākumā uzrakstīti 6 divciparu naturāli skaitļi. Andris ar savu gājienu var pieskaitīt dažiem skaitļiem 1, bet pārējiem skaitļiem 2. (Var arī pieskaitīt visiem skaitļiem 1 vai visiem skaitļiem 2.) Pēc tam Maija ar savu gājienu var nodzēst jebkuru skaitli, kas dalās ar 7 vai kam ciparu summa dalās ar 7. Pēc tam gājienu izdara Andris, pēc tam – Maija, utt. Pierādīt, ka Maija var panākt, lai skaitļu uz tāfeles vairs nebūtu (pieņemsim, ka tiek spēlēts pietiekoši ilgi). (Sk. (93))

Uzd. Ao2007.8.3. Juliata iedomājās naturālu skaitli, sareizināja visus tā ciparus un iegūto rezultātu pareizināja ar iedomāto skaitli. Gala rezultātā Juliata ieguva 1716. Kādu skaitli viņa iedomājās sākumā? (Sk. (54))

Uzd. Ao2008.7.2 (Ao2009.7.1). Dots, ka x un y – tādi naturāli skaitļi, ka $x \cdot y = 10^{12}$. Vai var būt, ka ne x, ne y nesatur savā pierakstā nevienu ciparu 0? (Sk. (41)i)

Uzd. Ao2008.8.3. Dots, ka $n > 1$ – naturāls skaitlis, kas nav pirmskaitlis. Pierādīt, ka var atrast vismaz trīs dažādus naturālus skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_k$, kas apmierina sakarību

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right).$$

(Sk. (44))

Uzd. Ao2009.7.3. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā cits skaitlis). Skaitļu summas rindās un kolonnās visas ir dažādas. Kāds lielākais daudzums šo summu var būt pirmskaitļi? (Sk. (51))

Uzd. Ao2009.7.5. Vairākiem rūķīšiem ir vienādi naudas daudzumi. Brīdi pa brīdim kāds no rūķīšiem paņem daļu savas naudas un sadala to pārējiem vienādās daļās. Pēc kāda laika izrādījās, ka vienam no rūķīšiem ir 8 dālderi, bet citam – 25 dālderi. Cik pavisam ir rūķīšu? (Dālderis ir vienīgā rūķīšiem pieejamā naudas vienība.) (Sk. (105))

Uzd. Ao2009.8.4. Profesors Cipariņš ar savu ārzemju kolēģi ieradās Ziemassvētku eglītes pasākumā, kurā piedalījās universitātes darbinieki, viņu draugi, ģimenes locekļi, paziņas utt. Norādot uz trim viesiem, Cipariņš piezīmēja: "Šo cilvēku vecumu reizinājums ir 2450, bet summa – divas reizes lielāka nekā Jūsu vecums." Kolēģis atteica: "Es nezinu un nevaru noskaidrot, cik veci ir šie ļaudis." Tad Cipariņš piebilda: "Es esmu vecāks par jebkuru citu šai eglītē." Tagad kolēģis uzreiz pateica minēto 3 viesu vecumus. Cik gadu tai laikā bija Cipariņam un cik – viņa kolēģim? (Visus vecumus izsaka veselos gados.) (Sk. (30))

Uzd. Ao2010.7.1. Uz tāfeles uzrakstīti pieci dažādi pirmskaitļi, kas nepārsniedz 100. Par tiem zināms, ka

(a) pirmais ir 7;

(b) trešais ir par 4 lielāks nekā piektais;

(c) skaitlim, kuru iegūst, ceturto sareizinot ar piekto, visi cipari ir vienādi;

(d) pirmais un ceturtais summā dod pieckāršotu otro.

Atrodi visus šos skaitļus! (Sk. (7))

Uzd. Ao2010.7.3. Ieraksti tabulas ar izmēriem 4×4 rūtiņas katrā rūtiņā vienu naturālu skaitli tā, lai vienlaicīgi izpildītos šādas divas īpašības:

(a) visi ierakstītie skaitļi ir dažādi;

(b) jebkuru četru skaitļu, nekādi divi no kuriem neatrodas ne vienā rindā, nedz vienā kolonnā, summa ir 2010.

Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt. (Sk. (22))

Uzd. Ao2010.7.4. Vairākiem bērniem visiem ir vienāds skaits konfekšu. Brīdi pa brīdim kāds no bērniem paņem daļu savu konfekšu un sadala to pārējiem vienādās daļās. Pēc kāda laika izrādījās, ka vienam no bērniem ir 4 konfektes, bet citam – 23 konfektes. Cik pavisam ir bērnu? (Konfektes netiek dalītas daļās, apēstas vai izmestas.) (Sk. (109))

Uzd. Ao2010.8.1. Starp skaitļiem

$$6 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 4,$$

nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes ("$+$", "$-$", "$*$", ":") un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu **(a)** 25, **(b)** 24.
Vai to var izdarīt? (Sk. (29))

Uzd. Ao2010.8.2. Andris un Juris katrs izvēlas trīs secīgus naturālus skaitļus tā, ka visi seši skaitļi ir atšķirīgi. Katru Andra skaitli sareizināja ar katru Jura skaitli, ieguva deviņus reizinājumus. Pierādi, ka starp iegūtajiem deviņiem skaitļiem vismaz astoņi būs savā starpā atšķirīgi! (Sk. (21))

Uzd. Ao2011.7.1. Uz tāfeles augošā secībā uzrakstīti seši dažādi pirmskaitļi, kas nepārsniedz 100. Par tiem zināms, ka

(a) visu skaitļu pēdējie cipari ir atšķirīgi;

(b) sestais skaitlis ir par 14 lielāks nekā trešais;

(c) ceturtā skaitļa pirmais cipars ir vienāds ar otrā skaitļa pēdējo ciparu;

(d) piektā un sestā skaitļa pirmie cipari ir vienādi.

Atrodi visus šos skaitļus! (Sk. (66))

Uzd. Ao2011.7.3. Atrodi naturālu skaitli, kuru, dalot ar 2010, atlikumā iegūst 13, bet, dalot ar 2011, atlikumā iegūst 3. (Sk. (27))

Uzd. Ao2011.8.1. Starp skaitļiem

$$8 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 2,$$

nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes ("$+$", "$-$", "$*$", ":") un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu **(a)** 15, **(b)** 16. (Sk. (1))

Uzd. Ao2011.8.4. Leonards izvēlējās patvaļīgu trīsciparu skaitli, pareizināja to ar 2 un tam galā pierakstīja sākotnējo skaitli. Vai viņa jauniegūtais skaitlis noteikti dalās ar **(a)** 17; **(b)** 23? (Sk. (17))

Uzd. Ao2011.8.5. Jānis un Anna spēlē šādu spēli. Uz tāfeles ir uzrakstīts naturāls skaitlis. Spēlētāji pēc kārtas veic gājienu: no uzrakstītā skaitļa atņem kādu šī skaitļa ciparu (izņemot 0), nodzēš uz tāfeles esošo skaitli un tā vietā uzraksta iegūto starpību. Uzvar tas, kurš pēc sava gājiena iegūst nulli.
Sākumā ir uzrakstīts skaitlis 2011, pirmo gājienu izdara Anna. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvarēs? Apraksti, kā uzvarētājam jārīkojas! (Sk. (65))

Uzd. Ao2012.7.1. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, kuriem izpildās vienādība

$$ab(3a + 5b) = 1234567?$$

(Sk. (31))

Uzd. Ao2012.8.1. Starp skaitļiem

$$4 \;\; 1 \;\; 5 \;\; 7,$$

nemainot to secību, ievieto aritmētisko darbību zīmes ("$+$", "$-$", "$*$", ":") un iekavas tā, lai iegūtās izteiksmes vērtība būtu **(a)** 13, **(b)** 14. (Sk. (80))

Uzd. Ao2012.8.3. Skolas matemātikas olimpiādē piedalījās ne vairāk kā 60 skolēnu. Vidējais punktu skaits, ko ieguva zēni, bija $21,6$. Vidējais punktu skaits, ko ieguva meitenes, bija 15. Vidējais punktu skaits, ko ieguva visi skolēni, bija 20. Cik skolēnu piedalījās olimpiādē? (Sk. (4))

Uzd. Ao2012.8.4. Pa apli uzrakstīti 11 veseli skaitļi. Jebkuru trīs pēc kārtas ņemtu skaitļu summa dalās ar 5. Pierādi, ka visi uzrakstītie skaitļi dalās ar 5. (Sk. (107))

Uzd. Ao2013.7.1. Naturālā divciparu skaitlī neviens no cipariem nav 0. Pierādīt, ka, dalot šo skaitli ar tā ciparu reizinājumu, dalījums ir vismaz $\frac{11}{9}$. (Sk. (94))

Uzd. Ao2013.7.3. Pierādīt, ka skaitlis $1234567891011\ldots175176$ (pēc kārtas uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 176) nav naturāla skaitļa kvadrāts. (Skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi.) (Sk. (32))

Uzd. Ao2013.8.1. Atrast visus naturālos skaitļus, kas nepārsniedz 1000000 un kuri, nosvītrojot to pirmo ciparu, samazinās 36 reizes . (Sk. (108))

Uzd. Ao2014.7.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, kuriem izpildās vienādība $a \cdot (3a+5b) \cdot 7b = 7654321$. (Sk. (78))

Uzd. Ao2014.7.4. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. zīm.). Kādam skaitlim jābūt rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi? Atrodiet visas iespējamās vērtības un pamatojiet, ka citu nav!

	24	
		?
13		

(Sk. (67))

Uzd. Ao2014.8.1. Skaitli $\frac{1}{13}$ pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja 2014. ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks –sākotnējais vai iegūtais? (Sk. (48))

Uzd. Ao2014.8.2. Atrast visus naturālos skaitļus, kas nepārsniedz 1000000 un kuri, nosvītrojot to pirmo ciparu, samazinās 15 reizes! (Sk. (79))

Uzd. Ao2014.8.5. Tabulas 3×3 rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Augšējās rindas vidējā rūtiņā ierakstīts skaitlis 24 (skat. zīm.). Vai rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis **(a)** 7, **(b)** 17?

	24	
?		

(Sk. (18))

Uzd. Ao2015.7.3. (a) Atrast tādu naturālu skaitli, kura ciparu summa ir 13, pēdējie divi cipari ir 13 un kurš dalās ar 13.

(b) Vai var atrast tādu naturālu skaitli, kura ciparu summa ir 11, pēdējie divi cipari ir 11 un kurš dalās ar 11?

(Sk. (62)i)

Uzd. Ao2015.8.1. Nosaki, vai izteiksmes $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ vērtība ir racionāls skaitlis! (Sk. (24))

Uzd. Ao2015.8.3. Atrast vienu naturālu skaitli, kas lielāks nekā 2015 un ko nevar izteikt kā naturāla skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summu. (Sk. (3))

Uzd. Ao2016.7.2. Karlsons sev pusdienām nopirka 8 pīrādziņus un 15 magoņmaizītes, bet Brālītis – vienu pīrādziņu un vienu magoņmaizīti. Karlsons par savām pusdienām samaksāja tieši divus eiro (katra maizīte un pīrādziņš maksā veselu skaitu centu). Cik samaksāja Brālītis? (Sk. (104))

Uzd. Ao2016.8.1. Aprēķini dotās izteiksmes vērtību!

$$\frac{2000016 \cdot 1999984}{5^{12} \cdot 2^{13} - 128}$$

(Sk. (106))

Uzd. Ao2016.8.2. Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, ka $ab(a+43b) = 434343$? (Sk. (76)i)

Uzd. Ao2016.8.3. Zināms, ka skaitlis dalās ar 2016 un ka visi tā cipari ir dažādi. Kāds ir lielākais ciparu skaits, kas var būt šajā skaitlī? (Sk. (26)i)

5. Rūtiņbirku biežums ieteikumos

#AlgebriskaIdentitāte	11	No2006.8.1, No2007.7.1, No2008.7.1, No2009.7.1, No2010.8.1, No2012.8.1, No2013.8.1, Ao2000.7.1, Ao2015.8.1, Ao2015.8.3, Ao2016.8.1
#AlgebrisksPārveidojums	10	No2005.7.4, No2006.7.4, Ao2001.7.2, Ao2001.8.3, Ao2002.8.2, Ao2004.8.3, Ao2010.8.2, Ao2014.7.4, Ao2014.8.5, Ao2016.8.1
#Dalāmība	13	No2005.8.3, No2007.8.4, No2010.7.3, No2011.7.2, No2013.7.2, No2014.7.3, Ao2004.8.3, Ao2007.7.3, Ao2007.8.3, Ao2009.7.5, Ao2010.7.4, Ao2011.8.4, Ao2016.7.2
#DalāmībaAr11	3	No2012.8.3, No2016.7.2, Ao2015.7.3
#DalāmībaAr2Un5	1	No2001.8.3
#DalāmībaAr3Un9	5	No2010.8.3, No2011.8.1, No2016.7.2, Ao2013.7.3
#DalāmībaAr4Un8	2	No2016.8.2, Ao2013.7.3
#DalāmībaAr9	1	No2000.7.4
#DalāmībasPazīmeCita	2	No2012.7.4, Ao2001.7.2
#DalījumsPirmreizinātājos	11	No2007.7.1, No2008.7.1, No2009.7.1, No2010.7.3, No2011.7.2, Ao2000.7.2, Ao2005.7.4, Ao2005.8.3, Ao2007.8.3, Ao2008.7.2, Ao2016.8.3
#DalītājuSkaits	3	No2009.7.3, Ao2008.8.3, Ao2009.8.4
#DalīšanaArAtlikumu	7	No2001.7.1, No2009.8.1, No2010.8.3, No2011.8.1, No2015.8.1, Ao2005.7.4, Ao2012.8.4
#DalīšanaPirmreizinātājos	2	No2013.7.2, No2014.7.3
#Decimālpieraksts	10	No2000.7.4, No2008.8.1, Ao2006.8.3, Ao2007.7.3, Ao2011.8.4, Ao2013.7.1, Ao2013.8.1, Ao2014.8.1, Ao2014.8.2, Ao2015.7.3
#DirihlēPrincips	6	No2001.7.4, No2003.7.4, No2004.7.1, Ao2000.7.4, Ao2000.8.3, Ao2002.7.5
#EiklīdaLemma	2	No2003.8.3, No2004.8.1
#EkstrēmaisElements	3	No2016.7.5, Ao2003.8.3, Ao2013.7.1
#GadījumuPārlase	18	No2012.7.1, No2013.7.1, No2015.7.3, No2016.7.5, Ao2002.7.4, Ao2002.7.5, Ao2003.7.3, Ao2004.8.5, Ao2005.7.4, Ao2005.8.3, Ao2006.7.1, Ao2009.8.4, Ao2010.7.1, Ao2010.8.1, Ao2010.8.2, Ao2011.7.1, Ao2011.8.1, Ao2012.8.1
#Grafi	4	No2013.7.1, Ao2002.7.4, Ao2003.7.3, Ao2007.7.1
#Indukcija	1	Ao2000.8.3
#Interpretācija	1	Ao2000.8.3
#Invariants	11	No2000.7.5, No2002.7.3, No2002.8.3, No2006.8.3, No2013.7.4, No2015.7.2, No2015.8.2, Ao2003.7.5, Ao2009.7.5, Ao2010.7.4, Ao2011.8.5
#KokaApstaigāšana	1	No2012.7.1
#Kombinācija	1	No2007.8.4
#Konstrukcija	3	No2000.8.5, No2002.7.3, Ao2003.8.5
#KonstrukcijaNoBeigām	1	Ao2004.8.5
#Krāsošana	1	No2015.7.3
#LKD	4	No2001.7.4, No2008.7.3, No2016.8.2, Ao2004.7.3
#LineārasKongruences	4	No2007.7.1, No2008.7.1, No2009.7.1, Ao2011.7.3
#MKD	2	No2007.8.4
#MasuCentrs	2	No2008.7.3, Ao2012.8.3
#MaģiskaisKvadrāts	4	No2013.8.4, Ao2010.7.3, Ao2014.7.4, Ao2014.8.5
#Nevienādība	14	No2002.8.3, No2004.8.2, No2005.7.4, No2005.8.1, No2006.7.4, Ao2000.8.3, Ao2001.8.3, Ao2002.8.2, Ao2002.8.3, Ao2003.8.3, Ao2006.7.1, Ao2013.7.1, Ao2015.8.3, Ao2016.7.2
#PakāpjuĪpašības	2	No2013.8.4, Ao2008.7.2
#Paritāte	9	No2000.8.5, No2003.7.4, No2004.7.1, No2005.7.4, No2008.8.1, Ao2009.7.3, Ao2012.7.1, Ao2014.7.2, Ao2016.8.2
#PeriodiskaVirkne	5	No2006.8.3, No2009.8.3, Ao2000.7.2, Ao2012.8.4, Ao2014.8.1
#Pirmskaitļi	6	No2003.7.4, No2004.7.1, No2010.8.1, Ao2000.7.4, Ao2009.7.3, Ao2011.7.1
#PretējaisNotikums	2	No2013.8.3, No2014.8.3
#ProgresijasSumma	5	No2002.8.3, Ao2003.7.5, Ao2005.8.3, Ao2009.7.3, Ao2013.7.3
#PēdējieCipari	2	No2009.8.3, No2011.7.1
#QĪpašības	1	Ao2015.8.1

#ReizināšanasLikums	2	No2013.8.3, No2014.8.3
#RekurentaVirkne	1	Ao2004.8.5
#Simetrija	3	No2011.7.1, Ao2002.7.5, Ao2003.8.5
#SintaksesKoks	3	Ao2010.8.1, Ao2011.8.1, Ao2012.8.1
#Spēles	5	No2005.8.3, Ao2002.7.4, Ao2003.7.3, Ao2007.7.3, Ao2011.8.5
#SummasPārkārtošana	7	No2000.8.5, No2009.8.1, Ao2000.7.4, Ao2008.8.3, Ao2009.7.3, Ao2010.7.3, Ao2013.7.3
#Vienādojums	2	Ao2013.8.1, Ao2014.8.2

6. Ieteikumi uzdevumiem

(1) **#AlgebriskaIdentitāte** $3999991 = 4000000 - 9 = 2000^2 - 3^2$. No2012.8.1

(2) **#AlgebriskaIdentitāte** Kreisajai pusei var pieskaitīt un atņemt $16x^2$, tad atdalīt pilno kvadrātu. No2006.8.1

(3) **#AlgebriskaIdentitāte** Pieskaitīt $2ab$ un atņemt tam vienādo $2cd$, atdalīt kvadrātus. $1+1+1+1 \neq x^2+y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$. Ao2000.7.1

(4) **#AlgebriskaIdentitāte** Pārveido $3000^2 - 1^2$ pēc kvadrātu starpības formulas. No2013.8.1

(5) **#AlgebriskaIdentitāte #AlgebrisksPārveidojums** $\frac{4(10^6-8)(10^6+8)}{2(10^{12}-64)} = \frac{4}{2} = 2$. Ao2016.8.1

(6) **#AlgebriskaIdentitāte #Nevienādība** Ja $N = n^2$ liels pilns kvadrāts, tad $n^2 - a^2$ dalās reizinātājos > 2. Ao2015.8.3

(7) **#AlgebriskaIdentitāte #Pirmskaitļi** Dala reizinātājos $102^2 - 1 = (102-1)(102+1)$ utt., īsina. Labajā pusē par pirmreizinātāju 101 vairāk. No2010.8.1

(8) **#AlgebriskaIdentitāte #QĪpašības** Kāpinot kvadrātā sanāk 20, bet $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ nav racionāls. Ao2015.8.1

(9) **#AlgebrisksPārveidojums #Dalāmība** $(100A+B) - (100B+A) = 99(A-B)$ un $A - B$ dalās ar 91. Divciparu skaitļiem tas nozīmē $A = B$. Ao2004.8.3

(10) **#AlgebrisksPārveidojums #GadījumuPārlase** Ja iedomāti $(a-1, a, a+1)$ un $(b-1, b, b+1)$ tad 2 vienādi reizinājumi, ja $b \pm 1 = 2a$ vai $a \pm 1 = 2b$. Ao2010.8.2

(11) **#AlgebrisksPārveidojums #MaģiskaisKvadrāts** Apz. $a_{22} = x$, $a_{31} = b$. Tad $a_{13} = 2x - b$, $a_{11} = x + b - 24$, $a_{33} = x - b + 24$, $a_{23} = 2b - 24$. Pie $b = 7$, $a_{23} < 0$. Ao2014.8.5

(12) **#AlgebrisksPārveidojums #MaģiskaisKvadrāts** Ja $a_{22} = x$, tad summas ir $3x$. Un $a_{13} = 2x - 13$, $a_{11} = x - 11$, $a_{33} = x + 11$, $a_{23} = 2$. Ao2014.7.4

(13) **#AlgebrisksPārveidojums #Nevienādība** $n = (n/2) + (n/3) + (n/6)$; citādi sadalīt dažādu daļu summā nevar. No2006.7.4

(14) (14)i **#AlgebrisksPārveidojums #Nevienādība** $n = n/2 + n/3 + n/7 + n/42$ un $42k$ ir īpaši. Nepāru nav, jo $1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 < 1$. No2005.7.4

(14)ii **#Paritāte (c)** Nepāru skaitļiem visi dalītāji ir nepāru; 4 nep. summa būtu pāru. No2005.7.4

(15) **#AlgebrisksPārveidojums #Nevienādība** Ja $1000a+b = 3ab$, tad $b/a = 3b-1000$. Veseli 3cip. a, b, tikai ja $b = 334$. Ao2001.8.3

(16) **#AlgebrisksPārveidojums #Nevienādība** Ja $100a + b = 3ab$, tad $b/a = 3b - 100$. Veseli 2cip. a, b, tikai ja $b = 34$. Ao2002.8.2

(17) **#DalāmībaAr11** $\overline{aabbcc}$ dalās ar 11 jo ciparu summas pāru un nepāru pozīcijās sakrīt. Neviens cipars nav 11. No2012.8.3

(18) **#DalāmībaAr11 #DalāmībaAr3Un9** Ar 9 – ciparu summa nemainās; ar 11 – pāru/nepāru pozīcijās ciparu summas atšķiras par $11k$. No2016.7.2

(19) **#DalāmībaAr11 #Decimālpieraksts (a)** 117 cip.summa 9, dalās ar 13. 11713 der. **(b)** $99k$ pāru/nepāru poz.cip.summa nevar būt 9. Ao2015.7.3

(20) **#DalāmībaAr2Un5** Ja skaitļa beigās pāru cipari un 5, tad tie visi jāizsvītro. Un 1379 dalās ar 7. Tātad 1379502468 der. No2001.8.3

(21) **#DalāmībaAr3Un9 #DalāmībaAr3Un9 #DalīšanaArAtlikumu** A atlikums dalot ar 9 (arī B atlikums) vienādi ar A ciparu summas atl. No2011.8.1

(22) **#DalāmībaAr3Un9 #DalīšanaArAtlikumu** n atlikums dalot ar 9 (arī pārkārtotā n atlikums) vienādi ar n ciparu summas atl. No2010.8.3

(23) (23)i **#DalāmībaAr3Un9 #ProgresijasSumma #SummasPārkārtošana** Ciparu summai tas pats atl. ar 9 kas $1 + \ldots + 176 = (176 \cdot 177)/2$ - dalās ar 3, bet ne ar 9. Ao2013.7.3

(23)ii **#DalāmībaAr4Un8** Skaitlis dalās ar 8, bet nedalās ar 16 – satur pirmskaitli 2 nepāru pakāpē. Ao2013.7.3

(24) **#DalāmībaAr4Un8 #LKD** *NNN* Dalās ar 8 t.t.t. ja $N = 0$ vai $N = 8$. *NNA* dalās ar 8 tikai tad, ja $A = 0$ vai $A = 8$. T.i. $A = N$ – pretruna. No2016.8.2

(25) **#DalāmībaAr9 #Decimālpieraksts** x un $x + 9$ cip.summas var atšķirties par $0, 45, \ldots$. **(c)** Būs ≥ 5 augoša virkne. No2000.7.4

(26) (26)i **#DalāmībasPazīmeCita** 13 (un 1001) dala $\overline{abcabc}$ kā arī $\overline{abccba}$, t.i. $13 \mid 99|a-c|$ un $a = c$. (b) 108801. Ao2001.7.2

(26)ii **#AlgebrisksPārveidojums** $100001a + 10010b + 1100c = 13 \cdot (\ldots) + 5(a - c)$. Tad $a - c$ dalās ar 13 un $a = c$; aizstāj c un dala ar 7. Ao2001.7.2

(27) **#DalāmībasPazīmeCita** Ar 101 dalās skaitļi, kam apaļajās un kvadrātiekavās liktās summas atšķiras par $101k$: $[01](00)[40](41)$. No2012.7.4

(28) **#Dalāmība #DalījumsPirmreizinātājos** $1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$. Sk. 11 un 13 nav cipari. Atbilde ir formā $11 \cdot 13 \cdot k$. Ao2007.8.3

(29) **#Dalāmība #DalījumsPirmreizinātājos** Katrs piektais skaitlis dalās ar 5, t.i. $n+1$, $n+2$ vai $n+3$ jādalās ar $5^3 = 125$. No2011.7.2

(30) **#Dalāmība #DalījumsPirmreizinātājos** Katrs septītais skaitlis dalās ar 7, tādēļ $x+1$, $x+2$ vai $x+3$ dalās ar $7^3 = 343$. No2010.7.3

(31) **#Dalāmība #DalīšanaPirmreizinātājos** $x(x+1)(x+2)$ Vienmēr dalās ar 3, bet tam jādalās arī ar 37. Tādu x ir trīsreiz vairāk kā $\lfloor 2013/37 \rfloor$. No2013.7.2

(32) **#Dalāmība #DalīšanaPirmreizinātājos** $x(x+1)(x+2)$ Vienmēr dalās ar 3, jādalās ar 29. Tādu x ir trīsreiz vairāk kā $\lfloor 2014/29 \rfloor$. No2014.7.3

(33) **#Dalāmība #Decimālpieraksts** Ja 3-cip. sk. ir $\overline{abc}$, tad jaunais ir $2001\overline{abc}$ dalās ar 23. Bet $17 \nmid 2001$. Ao2011.8.4

(34) **#Dalāmība #Decimālpieraksts #Spēles** Pārīšiem $(105; 106)$, $(160; 161)$, $(167; 168)$, $(175; 176)$ utt. Andris nevar tikt pāri. Ao2007.7.3

(35) **#Dalāmība #Invariants** Ja bērnu ir a, pārdalot k konf., starpība mainās par $(a-1)k + k = ak$. Ja beigu starp. ir 19, tad $a = 19$. Ao2010.7.4

(36) **#Dalāmība #Invariants** Ja rūķu ir a, pārdalot k dāld., starpība mainās par $(a-1)k + k = ak$. Ja beigu starp. ir 17, tad $a = 17$. Ao2009.7.5

(37) **#Dalāmība #Nevienādība** $200 - 8p = 15m$, t.i. m dalās ar 8. Un m nevar būt 16, citādi $p < 0$. Ao2016.7.2

(38) **#Dalāmība #Spēles** 1.gāj. Andris var atbildēt ar x, kas dalās ar vairākiem x_i. Bet 2.gāj. Juris nosauc 5 pirmskaitļus $p_i > x$. No2005.8.3

(39) **#DalījumsPirmreizinātājos** Visi 10 cipari: $32 \mid 45312$. Cip.summa dalās ar 9. Samaisa $6, 7, 8, 9, 0$, lai dalās ar 7. Ao2016.8.3

(40) **#DalījumsPirmreizinātājos #GadījumuPārlase #ProgresijasSumma** Ja a, b, c ir reizināti, tad var $abc = 32$ un $a + b + c = 45 - 32 = 13$. $(a, b, c) = (1, 4, 8)$. Ao2005.8.3

(41) (41)i **#DalījumsPirmreizinātājos #LineārasKongruences** Jebkuru pirmskaitļa pakāpi p^v var izteikt kā $(p^k)^3/(p^m)^5$. No2009.7.1

(41)ii **#AlgebriskaIdentitāte** $n = n^{21}/n^{20} = (n^7)^3/(n^4)^5$. No2009.7.1

(42) (42)i **#DalījumsPirmreizinātājos #LineārasKongruences** Katru pirmskaitļa pakāpi p^k skaitļa n sadalījumā var izteikt p^{3c}/p^{4d} kaut kādiem naturāliem c, d. No2008.7.1

(42)ii **#AlgebriskaIdentitāte** $n = n^9/n^8 = (n^3)^3/(n^2)^4$. No2008.7.1

(43) (43)i **#DalījumsPirmreizinātājos #LineārasKongruences** Katru pirmskaitļa pakāpi p^k skaitļa n sadalījumā var izteikt p^{5c}/p^{3d} kaut kādiem naturāliem c, d. No2007.7.1

(43)ii **#AlgebriskaIdentitāte** $n = n^{10}/n^9 = (n^2)^5/(n^3)^3$. No2007.7.1

(44) **#DalītājuSkaits** a ir p^3 vai pq. Savukārt b ir r^5 vai r^2s. Ja $p = r$, var dabūt $ab = p^3p^5 = p^8$. No2009.7.3

(45) **#DalītājuSkaits #GadījumuPārlase** Kolēģa 1.atbildei atbilst $(5, 10, 49)$ vai $(7, 7, 50)$. Otrā P.C. piebilde neļauj tos atšķirt. Ao2009.8.4

(46) **#DalītājuSkaits #SummasPārkārtošana** Sadala pa pāriem $a_1a_k = a_2a_{k-1} = \ldots = n$, tad $a_1 + \ldots + a_k = a_k + \ldots + a_1$. Ao2008.8.3

(47) **#DalīšanaArAtlikumu** 365 dienu gads sākas un beidzas ar to pašu dienu. 1.gads sākas/beidzas ar sestdienu $\Rightarrow$ 2.gads ar svētdienu. No2001.7.1

(48) **#DalīšanaArAtlikumu** Divu nepāru skaitļu summas/starpības ir pāru skaitļi. Pie tam 49^n un 7^n dod atlikumu 1, dalot ar 3. No2015.8.1

(49) **#DalīšanaArAtlikumu #DalījumsPirmreizinātājos #GadījumuPārlase** $407 = 250 + 125 + 32$, tad $p = 1000000$. > 6 5-faktorus nevar. Ao2005.7.4

(50) **#DalīšanaArAtlikumu #PeriodiskaVirkne** Atlikumi $(\mathrm{mod}\ 5)$ ik pēc 3 atkārtojas, tātad tie visi vienādi (un vienādi 0). Ao2012.8.4

(51) **#DalīšanaArAtlikumu #SummasPārkārtošana** Sadala divu tabuliņu summā: vienā $1 \ldots 7$, otrā $8k$. Vienmēr $(1+3+5+7)+(0+8+16+24) = 64$. No2009.8.1

(52) **#Decimālpieraksts** 22222 der, var arī starpā salikt 0 (arī $64 \cdot 10^k$ der). Ja n nepāra, $5n$ beigtos ar 5. Ao2006.8.3

(53) **#Decimālpieraksts #EkstrēmaisElements #Nevienādība** $\frac{10a+b}{ab} = \frac{10}{b} + \frac{1}{a}$ ir vismazākā, ja $a = b = 9$. Ao2013.7.1

(54) **#Decimālpieraksts #Paritāte** Palielinot skaitli par 1 bez pārnesuma, tā ciparu summas paritāte mainās par 1. No2008.8.1

(55) **#Decimālpieraksts #PeriodiskaVirkne** $1/13 = 0.(076923076923)$ (periods 12 cipari). 2014-tais jeb 10-tais cipars ir 9. Ao2014.8.1

(56) (56)i **#DirihlēPrincips #GadījumuPārlase** Ja > 30, tad no 10 sk., jāizvēlas 4. No $\{1,4,8\}$, $\{2,5,9\}$, $\{2,6,10\}$, $\{7\}$ jāņem pa 1 – neiespējami. Ao2002.7.5

(56)ii **#Simetrija** Lai izvēlētos 4 no *ABCABCXABC*, jāņem arī X, bet līdzīgi arī *ABCYABCABC* un X,Y starpība ir 3. Ao2002.7.5

(57) **#DirihlēPrincips #LKD** Ja ir 6 semikoli, aiz 2 pāru cipariem beigtos skaitlis. Ar pieciem: 1; 23; 4; 5; 67; 89. No2001.7.4

(58) **#DirihlēPrincips #Paritāte #Pirmskaitļi** Var svītrot 6 pāru skaitļus. Mazāk nevar, jo jāizjauc 6 pāri (1; 12) utt. No2003.7.4

(59) **#DirihlēPrincips #Paritāte #Pirmskaitļi** Var svītrot 7 pāru skaitļus. Mazāk nevar, jo jāizjauc 7 pāri $(1,12)$ utt. No2004.7.1

(60) **#EiklīdaLemma** Jāsvītro $11, 13$ un pa vienam 2 un 5 daudzkārtnim (10). $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 12 = 1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 15$ No2004.8.1

(61) **#EiklīdaLemma** Jāsvītro 7, 11 un viens 3 daudzkārtnis. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10$. No2003.8.3

(62) (62)i **#EkstrēmaisElements** Var izvēlēties $c = 0$, $a = 2017$, $b = -2017$, $d = -2017^2$. No2016.7.5

(62)ii **#GadījumuPārlase** Var izvēlēties $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ un $d = 5$ (tikai **(a)**) No2016.7.5

(63) **#EkstrēmaisElements #Nevienādība** $3, 5, 7, 11, 13, 17$ der, bet 7 saskaitāmos nevar, jo pat mazāko pirmsk. summa > 56. Ao2003.8.3

(64) **#GadījumuPārlase** (a) $p_1 = 7$, (b) $p_5 \neq 11$, (d) $p_4 \neq 11$, (c) $p_4p_5 = 3 \cdot 37$, (d) $p_4 \neq 37$. Tātad $(7, 2, 41, 3, 37)$. Ao2010.7.1

(65) **#GadījumuPārlase #Grafi** (18,7), (17,8), (16,9) → (2,14) → (11,5) → (4,12) → (13,3) → (1,15). No2013.7.1

(66) **#GadījumuPārlase #KokaApstaigāšana** $9 \to 63 \to 441 \to 41 \to 287 \to 27$. No2012.7.1

(67) **#GadījumuPārlase #Krāsošana** Pāru/nepāru skaitļi kā šaha galdiņš. Vidū liek 1, pārlasa 2, 4, 6, 10 izvietojumu variantus (8 neizmanto). No2015.7.3

(68) **#GadījumuPārlase #Nevienādība** Vietu skaits $k \geq 20$ (1.nosac.) un ≤ 21 (2.nosac.). 1995 vai 1994 jādalās ar k. Ao2006.7.1

(69) **#GadījumuPārlase #Pirmskaitļi** (a) $p_1 = 2$,$p_2 = 5$. (b),(d) $(p_3; p_6) = (53, 67)$. (c) $p_4 = 59$. Ao2011.7.1

(70) **#GadījumuPārlase #SintaksesKoks (a)** $(6+1) * 3 + 4 = 25$; **(b)** $6 : (1 - 3 : 4) = 24$. Ao2010.8.1

(71) **#GadījumuPārlase #SintaksesKoks (a)** $4 * 1 * 5 - 7 = 13$; **(b)** $4 : (1 - 5 : 7) = 14$ bet arī $(4 - 1 - 5) * (-7) = 14$. Ao2012.8.1

(72) **#GadījumuPārlase #SintaksesKoks (a)** $8 - 3 + 5 * 2 = 8 - (3 - 5 * 2) = 15$; **(b)** $8 : (3 - 5 : 2) = 16$. Ao2011.8.1

(73) (73)i **#GadījumuPārlase #Spēles** Ja skaitļiem $\{2, 3, \ldots, 7, 8\}$ uzvar 1.sp., atkārto viņa stratēģiju. Ja uzvar 2.sp., sāk ar gāj. "1". Ao2002.7.4

(73)ii **#Grafi** Sāk ar 2, tad uz katru $(5;7)$, $(6;8)$ un $(4;3)$ atbild ar otru sk. no pārīša. Ao2002.7.4

(74) (74)i **#GadījumuPārlase #Spēles** Ja skaitļiem $\{2, 3, \ldots, 8, 9\}$ uzvar 1.sp., atkārto viņa stratēģiju. Ja uzvar 2.sp., sāk ar gāj. "1". Ao2003.7.3

(74)ii **#Grafi** Sāk ar 2, tad katrā grupā $(5;7)$, $(3;8)$ un $(4;6;9)$ uzvar izolēti. Ao2003.7.3

(75) **#Grafi** Iespējamie pāri $(1,3)$, $(1,7)$, $(3,7)$, $(7,9)$. 4-cikla nav, jo 9 tikai viens kaimiņš. 3-cikls $1-3-7-1$. Ao2007.7.1

(76) (76)i **#Indukcija #Nevienādība (a)** $49\times$ "1" un $1\times$ "51". **(b)** Noņem $2\times$ "1" un induktīvais pieņēmums. Ao2000.8.3

(76)ii **#DirihlēPrincips #Interpretācija (b)** Intervālus pa apli regulāra 100-stūra virsotnēs; ≥ 2 punkti pretī viens otram. Ao2000.8.3

(77) (77)i **#Invariants (a)** summa būtu nepāru. **(b)** trīsdesmit $4k_i - 1$ summa nedalītos ar 4. No2002.8.3

(77)ii **#Nevienādība #ProgresijasSumma (b)** $1 + \ldots + 60 > 1000$. No2002.8.3

(78) **#Invariants** Katras maiņas iznākumā dzīvnieku kopskaits mainās par pāru skaitli. $99 + 21$ ir pāru, bet 2015 – nepāru. No2015.7.2

(79) **#Invariants** Mašīnu skaits mainās par $-7 + 16 = 9$ vai par $-19 + 4 = -15$, t.i. par $3k$. Bet $39 + 3k \neq 2015$. No2015.8.2

(80) **#Invariants** Skaitļu atlikums, dalot ar 4, palielinās par 2 katrā solī. Pēc 13 soļiem arī mainās par 2, bet jāpaliek tam pašam. No2013.7.4

(81) **#Invariants** Trīs skaitļu reizinājums nemainās. No2000.7.5

(82) **#Invariants #Konstrukcija** 8 nepāru pirmskaitļu summa var būt $52 + 2k$; visi var būt pirmskaitļi. No2002.7.3

(83) **#Invariants #PeriodiskaVirkne** Atlikumi, dalot ar 4 šādā virknē atkārtosies ar periodu 3, t.i. viens no atlikumiem neparādīsies vispār. No2006.8.3

(84) **#Invariants #ProgresijasSumma** Ar $n = 8$ var: veido $9, 32, 32$ utt. Ja $n = 9$, tad $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, bet summas paritāte nemainās. Ao2003.7.5

(85) **#Invariants #Spēles** Pēc katra Annas gājiena skaitlim jādalās ar 10. Ao2011.8.5

(86) (86)i **#Kombinācija #MKD** Kas dalās ar $k(k + 1) \ldots (k + 11)$, tas dalās arī ar $1, 2, \ldots, 12$. Mazākais tāds ir $8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 27720$. No2007.8.4

(86)ii **#Dalāmība #MKD** No 12 pēc kārtas ņemtiem, ≥ 1 dalās ar 5, 7, 8, 9 un 11. Mazākais ir to reizinājums. No2007.8.4

(87) (87)i **#KonstrukcijaNoBeigām #RekurentaVirkne** Pirms pēdējās izsvītrošanas pēdējais skaitlis bija #2, pirms tam #3, #5, #8, #12, utt. Ao2004.8.5

(87)ii **#GadījumuPārlase** Pēc n svītrošanām pirmais palikušais ir x_n. Pamato $x_{n+1} = \lceil 3x_n/2 \rceil$ pāru un nepāru x_n. Ao2004.8.5

(88) **#Konstrukcija #Paritāte #SummasPārkārtošana** $n = 5$ nevar, jo 55 nepāru. $n = 6$ var $(1, 2, 3, 10, 11, 12$ pa vertikāli). No2000.8.5

(89) **#Konstrukcija #Simetrija (a)** $(1, 5, 6), (2, 3, 7)$. **(b)** $(1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$. **(c)** 2003 veido **"(b)"** pieskaitot k_i. Ao2003.8.5

(90) **#LKD** Daļa $\frac{k}{k+37}$ nesaīsināma, ja $k < 37$. Ao2004.7.3

(91) **#LineārasKongruences** $2010k + 13$ dod atlikumus $13 - k$ dalot ar 2011. Ao2011.7.3

(92) **#MasuCentrs MKD** Pleci $1.6 = |21.6 - 20|$ un $5 = |15 - 20|$ attiecas kā 8 un 25. Zēnu ir 25 un meiteņu 8. Ao2012.8.3

(93) **#MasuCentrs #LKD** Lai 71 būtu līdzsvara punkts starp $84k$ un $54m$, attiecībai k/m jābūt $17/13$ un $\mathrm{LKD}(13, 17) = 1$. No2008.7.3

(94) **#MaģiskaisKvadrāts #PakāpjuĪpašības** Izveido 3×3 parasto maģisko kvadrātu. Pēc tam ceļ attiecīgajās pakāpēs. No2013.8.4

(95) **#MaģiskaisKvadrāts #SummasPārkārtošana** Saskaita 2 tabulas: $((1, 2, 3, 4), \ldots, (1, 2, 3, 4))$ un $(0, \ldots, 0), (4, \ldots, 4), (996, \ldots, 996), (1000, \ldots, 1000)$. Ao2010.7.3

(96) **#Nevienādība** Ja d ir lielākais, tad $a + b = d$, kur a,b ir tieši pirms d. Bet $c > 0$, t.i. $a + b < c + d$. Ao2002.8.3

(97) **#Nevienādība** Katram ciparu skaitam, izņemot 1-cipara sk., ir tieši viens 2^n, kas sākas ar 1. No2004.8.2

(98) **#Nevienādība** Katram ciparu skaitam, izņemot 1-cipara sk., ir tieši viens 2^n, kas sākas ar ciparu 1. No2005.8.1

(99) **#PakāpjuĪpašības #DalījumsPirmreizinātājos** Nē. x vai $y = 2^{12} = 4096$. (Vai arī sareizināsies 2 un 5.) Ao2008.7.2

(100) **#Paritāte** Nepāru reizinājums nozīmē, ka a, b ir nepāru. Bet tad $3a + 5b$ ir pāru, kas ir pretruna. Ao2012.7.1

(101) **#Paritāte** Nepāru reizinājums nozīmē, ka a, b ir nepāru. Bet tad $3a + 5b$ ir pāru, kas ir pretruna. Ao2014.7.2

(102) **#Paritāte** Reizinājums ir nepāru, t.i. a, b ir nepāru. Bet tad $a + 43b$ ir pāru. Ao2016.8.2

(103) **#Paritāte #Pirmskaitļi #ProgresijasSumma #SummasPārkārtošana** Nepāri kā pentomino "V". $(5, 6, 4)$,$(9, 8, 2)$,$(7, 3, 1)$. Nevar būt $p_1 + p_2 + p_3 = 45$. Ao2009.7.3

(104) **#PeriodiskaVirkne #DalījumsPirmreizinātājos** Atlikumi $1, 11, 111, \ldots, 111111$ ar 7: $1, 4, 6, 5, 2, 0$. 777777 der. Ao2000.7.2

(105) **#PeriodiskaVirkne #PēdējieCipari** 113 pakāpes mainās ar periodu $(1, 3, 9, 7)$, bet 19 pakāpes ar periodu $(1, 9)$. No2009.8.3

(106) **#Pirmskaitļi #SummasPārkārtošana #DirihlēPrincips** $(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 8)$, $(6, 7)$, $(9, 10)$, $(11, 12)$. Bet $(1, 100)$ ir tikai 24 pirmskaitļi > 2. Ao2000.7.4

(107) **#PretējaisNotikums #ReizināšanasLikums** 4-ciparu skaitļu bez pāru cipariem ir $5^4 = 625$; citu būs $9000 - 625$. No2013.8.3

(108) **#PretējaisNotikums #ReizināšanasLikums** 5-ciparu skaitļu bez nepāru cipariem ir $4 \cdot 5^4 = 2500$; citu būs $90000 - 2500$. No2014.8.3

(109) **#Simetrija #PēdējieCipari** 10 grupas: $\left(1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2 + 9^2\right)$ katra ar pēdējo ciparu $(1+4+9+6)\cdot 2+5=5$. No2011.7.1

(110) **#Vienādojums #Decimālpieraksts** a - 1.cipars; $a\cdot 10^k+b=15b$; $a\cdot 10^k=14b$. Tad $a=7, b=5\cdot 10^{k-1}$. Ao2014.8.2

(111) **#Vienādojums #Decimālpieraksts** a - 1.cipars; $a\cdot 10^k+b=36b$; $a\cdot 10^k=35b$. Tad $a=7, b=2\cdot 10^{k-1}$. Ao2013.8.1