Pulciņš #14, 2025-01-29

LOĢIKA UN ALGORITMI

Apgalvojums:

Ja svēršanai uz sviras svariem ir divi iznākumi (vieglāks, smagāks), tad pēc n svēršanām ar šiem svariem var atšķirt ne vairāk kā 2^n dažādus stāvokļus. Ja ir trīs iznākumi (vieglāks, vienāds, smagāks), tad pēc n svēršanām ar šiem svariem var atšķirt ne vairāk kā 3^n dažādus stāvokļus.

Apgalvojums:

Ja doti n objekti ar dažādu svaru un katrā svēršanā var salīdzināt divus, tad objektu sakārtošanai minimāli nepieciešamo svēršanu skaits attēlots tabulā:

n	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	2	6	24	120	720
Svēršanas	0	1	3	5	7	10

Sk. Comparison sort. (Ja neparasti veicas, tad n objektus var sakārtot pat ar $n-1$ svēršanām.)

Apgalvojums:

Lai n virsotnes savienotu sakarīgā grafā, jānovelk vismaz $n-1$ šķautnes.

LV.SOL.2010.8.4:

Dotas 2010 pēc ārējā izskata vienādas monētas; to masas visas ir atšķirīgas. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Uz katra kausa uzliekot pa vienai monētai, smagākā no tām nosveras uz leju.

(A) Pierādīt, ka gan smagāko monētu vienu pašu, gan vieglāko monētu vienu pašu var atrast, izdarot 2009 svēršanas.

(B) Vai abas šīs monētas – gan smagāko, gan vieglāko – var atrast, izdarot mazāk nekā 4000 svēršanas?

LV.NOL.2010.7.5:

Seši rūķīši katrs uzzinājuši vienu jaunu ziņu (katrs citu). Katram mājās ir telefons, un viena saruna ilgst vienu stundu. Tās laikā abi runātāji pagūst viens otram izstāstīt visus jaunumus. Kāds ir mazākais stundu skaits, kuru laikā visi rūķīši var uzzināt visus jaunumus?

LV.SOL.2014.7.4:

Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 7 ir ar vienādu masu, bet vienas monētas masa ir citāda. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanu palīdzību atrast atšķirīgo monētu?

LV.NOL.2015.7.5:

Uz galda rindā novietotas sešas monētas, zināms, ka starp tām ir vismaz viena īsta un vismaz viena viltota monēta, kas ir vieglāka nekā īstā. Visas īstās monētas sver vienādi, un arī visas viltotās monētas sver vienādi, bet ir vieglākas par īstajām. No katras īstās monētas pa labi (ne noteikti blakus) atrodas kāda viltota monēta, bet no katras viltotās pa kreisi (ne noteikti blakus) atrodas kāda īsta monēta. Kā ar divām svēršanām ar sviru svariem bez atsvariem var noteikt katra veida monētu skaitu?

LV.NOL.2019.8.2:

Zināms, ka no 26 monētām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā pārējās, kurām visām ir vienāda masa. Kā ar trīs svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu?

LV.NOL.2019.9.2:

Dotas divas melnas, divas sarkanas un divas zaļas lodītes. Vienas lodītes masa ir 99 g, bet tādas pašas krāsas otras lodītes masa ir 101 g. Pārējās četras lodītes katra sver 100 g. Kā, lietojot sviras svarus bez atsvariem, ar divām svēršanām atrast vieglāko lodīti?

LV.NOL.2020.8.5:

Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka vai nu visām tām masas ir vienādas, vai arī 4 monētām ir viena masa, bet 4 monētām – cita masa. Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var noskaidrot, kura no iespējām pastāv īstenībā?

LV.NOL.2019.7.2:

Dotas 14 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Zināms, ka 13 monētu masas ir vienādas savā starpā, bet vienas monētas masa ir citāda. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

LV.AMO.2013.8.5:

Rūķītis ir iedomājies skaitļus x_1, x_2, x_3 un x_4, katrs no tiem ir vai nu 0, vai 1. Ja rūķītim pajautā: “Kāds ir i-tais skaitlis?” ($i = 1, 2, 3$ vai 4 pēc izvēles), tad viņš pasaka x_i vērtību. Pierādīt, ka ar 3 jautājumiem pietiek, lai uzzinātu, vai virkne $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ ir monotona.

Skaitļu virkne $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ ir monotona, ja tā ir nedilstoša vai neaugoša (t. i., $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ vai $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$).

LV.AMO.2015.7.5:

Uz galda stāv četras pēc izskata vienādas bumbiņas, to masas attiecīgi ir 10, 11, 12 un 13 grami. Vai ar dažām svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem, kur katrā kausā drīkst ielikt tieši divas bumbiņas, iespējams **(A)** atrast visvieglāko un vissmagāko bumbiņu; **(B)** noteikt katras bumbiņas masu?

LV.AMO.2016.9.5:

Sivēnam ir 10 podi ar medu, kas pēc kārtas sanumurēti ar skaitļiem no 1 līdz 10. Kādu dienu viņš uzzināja, ka Vinnijs Pūks slepeni ir izēdis četrus no tiem, pie tam to numuri veido aritmētisko progresiju. Katra poda saturu Sivēns var pārbaudīt. Pierādīt, ka viņš var noskaidrot, kuri tieši ir izēstie podi, pārbaudot ne vairāk kā četrus podus!

LV.AMO.2017.8.4:

Doti pieci pēc izskata vienādi atsvari. Katra atsvara masa izsakāma veselā skaitā gramu, turklāt šie skaitļi ir pēc kārtas esoši naturāli skaitļi. Atsvaru masu salīdzināšanai atļauts izmantot sviru svarus, kur katrā svaru kausā drīkst likt tieši divus atsvarus. Vai iespējams **(A)** noteikt visvieglāko un vissmagāko no atsvariem; **(B)** sarindot visus atsvarus pēc kārtas no smagākā līdz vieglākajam?

Piezīme. Ar sviru svariem nevar noteikt, tieši par cik gramiem viens svaru kauss ir smagāks nekā otrs.

LV.AMO.2023.8.5:

Uz palodzes sēž vairākas bizbizmārītes, katrai no tām uz muguras ir vai nu trīs punktiņi, vai astoņi punktiņi. Tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir astoņi punktiņi, vienmēr saka patiesību, bet tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir trīs punktiņi, vienmēr melo. Katra bizbizmārīte izteicās:

- pirmā bizbizmārīte teica: “punktiņu skaits uz muguras mums visām ir vienāds”;
- otrā teica: “mums visām kopā uz muguras ir 38 punktiņi”;
- trešā teica: “nē, mums visām kopā uz muguras ir 48 punktiņi”;
- katra no atlikušajām bizbizmārītēm teica: “no pirmajām trijām bizbizmārītēm tieši viena teica patiesību”.

Cik bizbizmārītes sēž uz palodzes?