PIRMSKAITĻI UN PIRMREIZINĀTĀJI

Iesildīšanās:

Izteikt dažus skaitļus (piemēram, $90, 210, 630, 1000, 1600$) kā divu skaitļu reizinājumus $a \cdot b$ ($a \leq b$) visos iespējamajos veidos. Katram skaitlim saskaitīt veidus; arī pamanīt, kuri divi ir savstarpēji "tuvākie" reizinātāji.

Definīcija:

Naturālu skaitli $p > 1$ sauc par *pirmskaitli*, ja tas dalās tikai ar 1 un ar pašu p.

Piemēram, 2027 ir pirmskaitlis – tas nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas nepārsniedz $\sqrt{2027} \approx 45$. Skaitlis $2025 = 45^2$ nav pirmskaitlis.

Teorēma:

Katru naturālu skaitli $n > 1$ var tieši vienā veidā izteikt kā pirmskaitļu reizinājumu (tos sauc par pirmreizinātājiem).

$90 = 6 \cdot 15 = (2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5)$. Arī $90 = 9 \cdot 10 = (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5)$. $2025 = 45^2 = (5 \cdot 9)^2 = 5^2 \cdot 9^2 = 3^4 \cdot 5^2$.

Definīcija:

Par naturāla skaitļa n *dalītāju skaita funkciju* sauc $d(n)$ – visu skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu.

Piemēram, $d(1) = 1$; $d(p) = 2$ (katram pirmskaitlim p ir divi pozitīvi dalītāji), $d(90) = 12$ (skaitļa 90 dalītāji ir $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90$).

Apgalvojums:

Skaitlim, kas izteikts kā pirmreizinātāju pakāpes $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, pozitīvo dalītāju skaits:

$$d(n) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (a_k + 1)\,.$$

Apgalvojums:

Lai skaitlis n būtu pilns kvadrāts (izsakāms kā $n = k^2$) ir nepieciešami un pietiekami, lai tā sadalījumā pirmreizinātājos $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ visi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ būtu pāra skaitļi.

Līdzīga pazīme: pilniem kvadrātiem pozitīvo dalītāju funkcija $d(n)$ ir ar nepāra vērtību.

Definīcija:

Par veselu skaitļu m un n **lielāko kopīgo dalītāju (LKD)** sauc lielāko naturālo skaitli, ar kuru tie abi dalās. To apzīmē ar $\text{LKD}(m, n)$.

Skaitļus m un n sauc par *savstarpējiem pirmskaitļiem*, ja $\text{LKD}(m, n) = 1$.

Apgalvojums:

Ja divi skaitļi sadalīti pirmreizinātājos, tad to lielākais kopīgais dalītājs iegūstams, katru pirmreizinātāju kāpinot mazākajā no abām pakāpēm:

Pirmreizinātājs	2	3	5	7
300	2^2	3^1	5^2	7^0
630	2^1	3^2	5^1	7^1

No šī piemēra redzam, ka $\text{LKD}(300, 630) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 30$.

Eiklīda algoritms:

Praksē divu skaitļu LKD var atrast ar *Eiklīda algoritmu* – lielāko skaitli atkārtoti aizstāj ar atlikumu, kas rodas, dalot lielāko ar mazāko. Tad, kad izdalās bez atlikuma, pēdējais dalītājs ir LKD:

$$\text{LKD}(300, 210) = \text{LKD}(210, 90) = \text{LKD}(90, 30) = \text{LKD}(30, 0) = 30.$$

LV.SOL.2020.8.3:

Atrast tādu divpadsmitciparu skaitli (kas nesatur ciparu 0) tā, lai katri divi blakus uzrakstīti cipari veidotu pirmskaitli un visi šie pirmskaitļi būtu dažādi!

LV.SOL.2017.8.1:

Atrast mazāko naturālo skaitli, kura ciparu reizinājums ir 210 un kas dalās ar 9.

LV.SOL.2014.7.3:

Vai var atrast tādus trīs naturālus skaitļus a, b un c, ka $(a + b)(b + c)(c + a) = 20142013$?

LV.SOL.2014.8.4:

Ar $\overline{xyz}$ apzīmēsim trīsciparu skaitli ar cipariem x (simti), y (desmiti) un z (vieni).

Pierādīt: ja $\overline{abc}$ dalās ar 37, tad arī $\overline{bca} + \overline{cab}$ dalās ar 37.

LV.SOL.2013.7.5:

Vai naturāla skaitļa kvadrāts (reizinājums pašam ar sevi) var būt skaitlis **(A)** $\overline{AABB}$, **(B)** $\overline{ABAB}$, kur A un B ir dažādi cipari.

LV.SOL.2013.8.1:

Cik starp pirmajiem 2012 naturāliem skaitļiem ir tādi, kas nedalās ne ar 5, ne ar 7?

LV.SOL.2011.8.5:

Pie sienas ir lampiņas, kas pēc kārtas sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 2 līdz N. Vadības panelī ir slēdži, kuri numuri ir pēc kārtas sekojoši pirmskaitļi, sākot no 2 (pēdējā slēdža numurs ir pirmskaitlis, kas pārsniedz N). Kad pārslēdz slēdzi ar numuru K, visas lampiņas, kuru numuri dalās ar K, maina savu stāvokli (no ieslēgtas uz izslēgtu vai no izslēgtas uz ieslēgtu). Sākumā visas lampiņas ir izslēgtas. Zināms, ka ar slēdžu palīdzību var panākt, ka visas lampiņas vienlaicīgi ir ieslēgtas. Kādai lielākajai N vērtībai tas ir iespējams?

LV.SOL.2010.7.1:

Kāds lielākais daudzums pirmskaitļu var būt starp 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem?

LV.SOL.2010.8.2:

Ir zināms, ka no apgalvojumiem "x^3 dalās ar 2"; "x^3 dalās ar 4"; "x^3 dalās ar 8"; "x^3 dalās ar 16". vismaz viens ir patiess un vismaz viens ir aplams (x ir naturāls skaitlis). Kuri apgalvojumi ir patiesi, kuri – aplami?

LV.SOL.2009.8.1:

Kādu lielāko daudzumu no naturāliem skaitļiem $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$ var sadalīt divās grupās tā, lai abās grupās ietilpstošo skaitļu reizinājumi būtu vienādi savā starpā?