ĀVĢ, 2024./2025.

Matemātikas pulciņš #8, 2024-12-04

GRAFI UN KRĀSOJUMI

Definīcija: *Grafs* G satur kopu ar virsotnēm $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un šķautnēm $E = \{(v_i, v_j), \ldots\}$ – katra šķautne savieno divas grafa virsotnes. Šķautnes virziens nav svarīgs. (*Orientētā grafā* šķautnes virziens ir svarīgs, uz šķautnēm zīmē bultiņas.)

Grafa virsotnes var pārvietot; šķautnes var attēlot gan taisnas, gan liektas. Mūs neinteresē šķautņu krustošanās ārpus grafa virsotnēm. Parasti uzskata, ka šķautne nevar savienot virsotni pašu ar sevi; nevar savienot tās pašas virsotnes ar vairākām šķautnēm.

Definīcija Par *koku* sauc tādu grafu, kas ir (1) *sakarīgs* – no katras virsotnes var aiziet uz katru citu virsotni, izmantojot šķautnes, (2) *bez cikliem* – nevar apstaigāt virsotnes pa ciklu (atgriežoties sākumpunktā un izmantojot katru cikla šķautni tikai vienreiz).

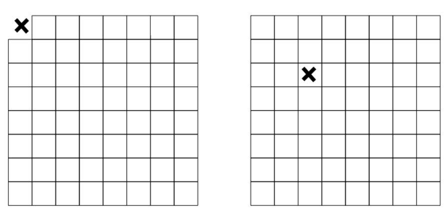
Gatavošanās jautājumi: Grafi un krāsojumi

1.jautājums:

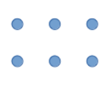
(A) Kokam ir 100 virsotnes. Cik šādam kokam ir šķautņu?

(B) Kāds mazākais krāsu skaits n nepieciešams, lai jebkura koka virsotnes var izkrāsot n krāsās tā, ka ikviena šķautne noteikti savienotu divas virsotnes dažādās krāsās?

2.jautājums: No šaha galdiņa 8×8 izgriezta viena rūtiņa divos veidos (sk. attēlu). Kurus no kvadrātiem var sagriezt taisnstūrīšos 1×3 un kurus nevar?



3.jautājums: Deviņi punkti izvietoti kvadrātiskā režģī kā parādīts attēlā. Novilkt lauztu līniju no 4 posmiem tā, lai tā ietu caur visiem deviņiem punktiem. (Lauzta līnija sastāv no vairākiem savienotiem nogriežņiem – to var novilkt, neatraujot rakstāmo no papīra. Posmi drīkst savstarpēji krustoties un lauztajai līnijai nav jāatgriežas sākumpunktā.)



4.jautājums: Cik krāsas nepieciešamas, lai izkrāsotu katru valsti (un arī jūru) Eiropas kontūrkartē tā, ka valstīm, kam ir kopīga robeža, būtu atšķirīgas krāsas; valsti, kas saskaras ar jūru, nevar krāsot tāpat kā jūru. Sk. Eiropas kontūrkarte. (Valstis, kas kartē izskatās mazas vai neredzamas, nav jākrāso - Andora, Malta, Lihtenšteina, Sanmarino, Monako, Vatikāns.)

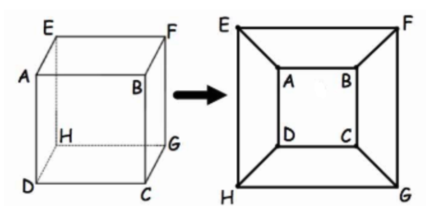
5.jautājums: Grafā ir $n = 10$ virsotnes un katras divas virsotnes savienotas ar šķautni (tādu grafu sauc par *pilnu*). Cik šajā grafā ir šķautņu?

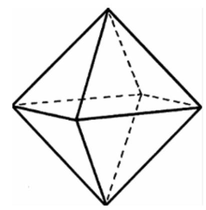
6.jautājums: Pusdienu starpbrīdī pie katra no 8 galdiņiem sēž tieši 6 cilvēki. Daži no viņiem ir savstarpēji draugi (ja cilvēks A ir draugs cilvēkam B, tad arī B ir draugs A); neviens nav draugs pašam sev. Pie katra galdiņa sēdošie cilvēki nosauca, cik no viņu draugiem vēl sēž pie šī galdiņa. Atrast, pie kuriem galdiņiem iegūtās atbildes ir neiespējamas.

(A) $5, 4, 3, 2, 1, 0$; (B) $6, 5, 4, 3, 2, 1$; (C) $2, 2, 2, 2, 2, 2$; (D) $3, 3, 3, 2, 2, 2$.

(E) $3, 3, 2, 2, 2, 2$; (F) $1, 1, 1, 1, 1, 1$; (G) $5, 3, 3, 3, 3, 3$; (H) $5, 5, 4, 3, 2, 1$.

7.jautājums: Daudzskaldņus var uzzīmēt kā grafus bez šķautņu krustošanās (piemēram, vienu skaldni izstiepj ļoti lielu un visas virsotnes nonāk tās iekšpusē). Zīmējumā attēlotajam kubam saskaitīt "Š" - cik kubā ir šķautņu; "V" - cik kubā ir virsotņu; "S" - cik kubā ir skaldņu. Aprēķināt izteiksmi Eilera formulai: V + S - Š.

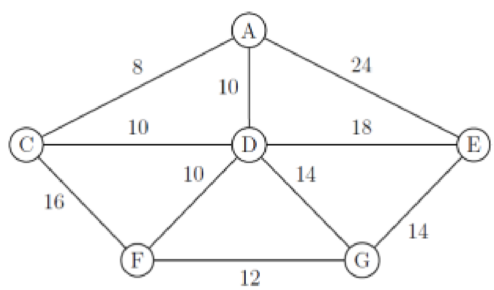




8.jautājums: Uzzīmēt oktaedru (figūra, ko veido divas kopā ar pamatiem salīmētas četrstūra piramīdas; sk. attēlu) kā planāru grafu. Saskaitīt oktaedrā šķautnes, virsotnes un skaldnes un aprēķināt Eilera formulas vērtību: V + S - Š.

Olimpiāžu uzdevumi:

1.uzdevums: Diagrammā uzzīmētas apdzīvotas vietas ar norādītiem ceļiem un braukšanas attālumiem. Autobuss izbrauca no pilsētas A un pēc 2222 kilometru nobraukšanas atgriezās pilsētā A. Pierādīt, ka autobuss noteikti brauca pa ceļa posmu EG.



2.uzdevums: Šaha turnīrā piedalās trīs komandas pa 10 šahistiem katrā komandā. Ikviens šahists turnīrā spēlēs tieši vienreiz ar katru no šahistiem abās pārējās komandās (pavisam 20 spēles). Kādā brīdī izrādījās, ka ir izspēlētas jau 201 spēles. Pierādīt, ka atradīsies trīs šahisti, kuri katrs ar katru jau spēlējuši.

3.uzdevums: Dots balts kvadrāts, kas sastāv no 10×10 rūtiņām. Pēterītis nokrāsoja melnas visas rūtiņas, kas pieskaras šī kvadrāta malām. Vai var nokrāsot melnas vēl dažas no atlikušajām rūtiņām atlikušajā baltajā laukumā 8×8 tā, lai nekur šajā kvadrātā nebūtu vienkrāsains kvadrāts 2×2 vai arī kvadrāts 2×2, kas izkrāsots kā šaha galdiņš?